立信会计学院

数统系

概率论与数理统计

11

Jinsw

*二维正态分布

若二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

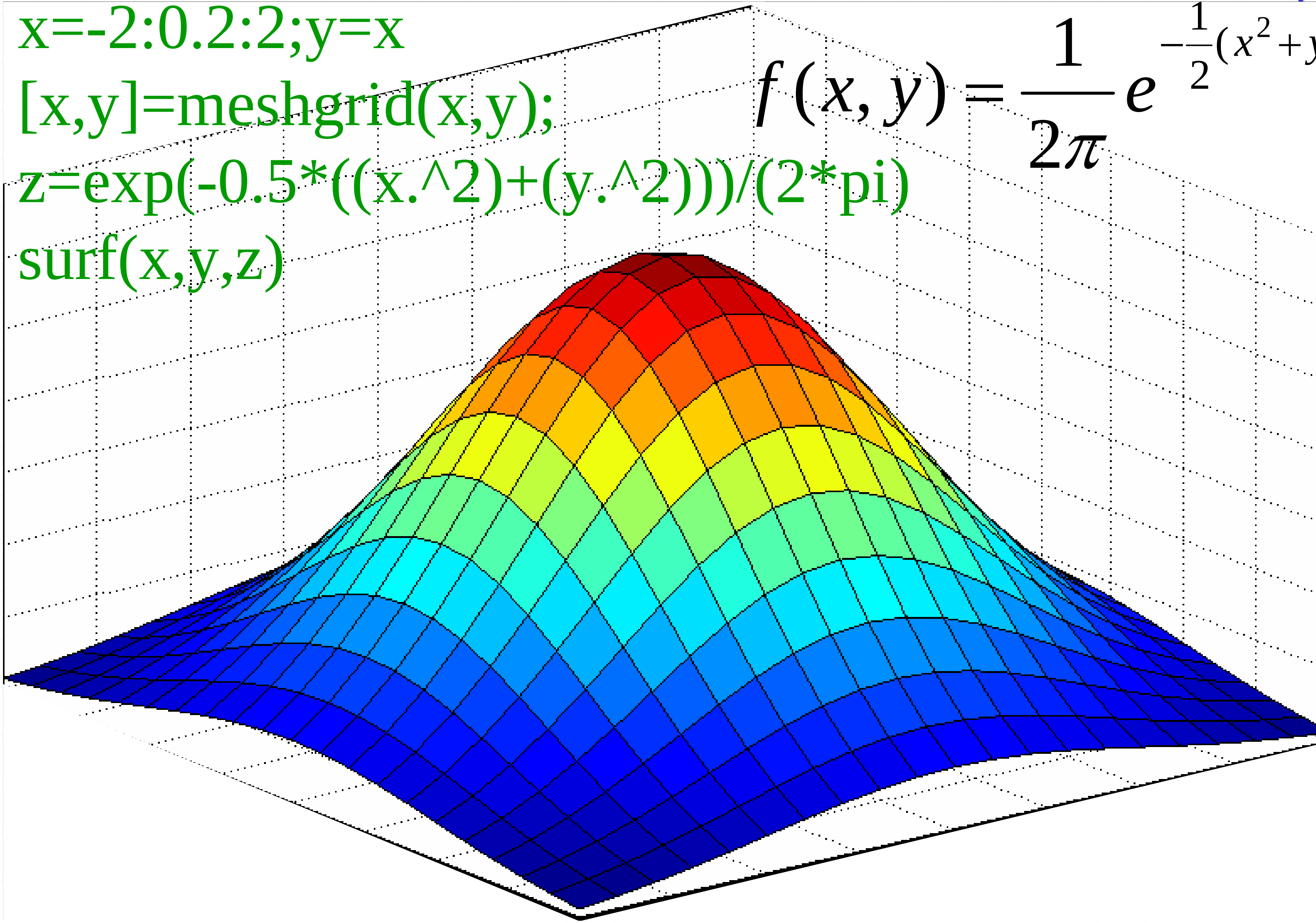
其中：$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 均为常数，且 $\sigma_1>0$，$\sigma_2>0$，$|\rho|<1$，则称 (X,Y) 服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的**二维正态分布**。

记作：$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

$$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

```
x=-2:0.2:2;y=x
[x,y]=meshgrid(x,y);
z=exp(-0.5*((x.^2)+(y.^2)))/(2*pi)
surf(x,y,z)
```

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$



§3．2 边缘分布

一．边缘分布

* 二维随机变量 (X,Y) ——反映整体结果

两个一维随机变量 X 、Y

————分别反映一个侧面

▲**定义：**

设 (X,Y) 是二维随机变量，分量 X 的分布函数称为 (X,Y) 的关于 X 的边缘分布，记为 $F_X(x)$；分量 Y 的分布函数称为 (X,Y) 的关于 Y 的边缘分布，记为 $F_Y(y)$。

对二维随机变量(X,Y)，有

$$P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < +\infty\} = F(x,+\infty)$$

$$F_X(x) = \sum_{x_i \le x} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$$

离散

连续

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s,t)\,ds\,dt = \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(s,t)\,dt \right] ds$$

$$P\{Y \le y\} = P\{X < +\infty, Y \le y\} = F(+\infty, y)$$

$$F_Y(y) = \sum_{y_j \le y} \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$$

离散

连续

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s,t)\,ds\,dt = \int_{-\infty}^{y} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(s,t)\,ds \right] dt$$

$*$一般： 二维随机变量 (X,Y)

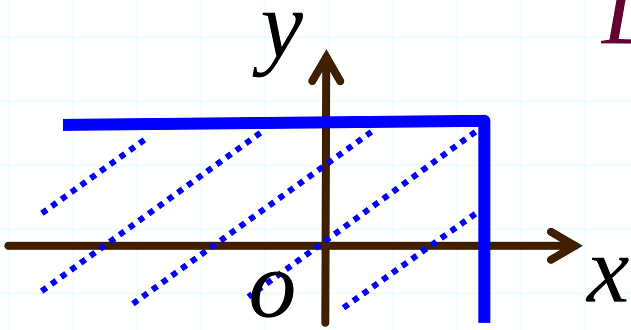
————平面上点的坐标

$F_X(x)$————点 (X,Y) 落在 D_1 上的概率

$$D_1=\{(X,Y)\mid X\le x, Y<+\infty\}$$

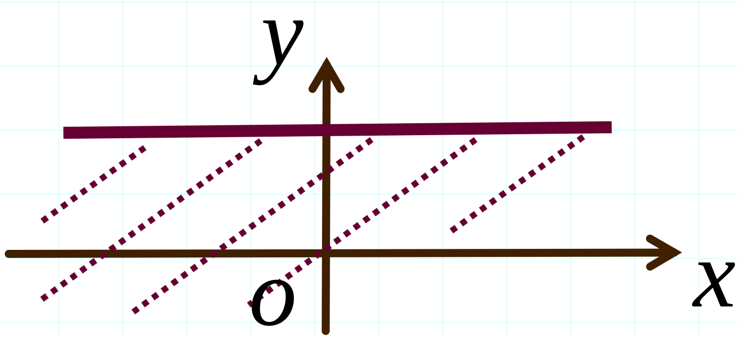
$F_Y(y)$————点 (X,Y) 落在 D_2 上的概率

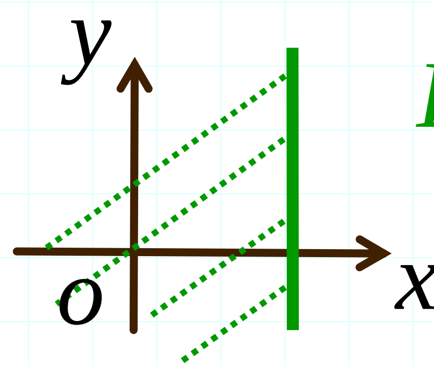
$$D_2=\{(X,Y)\mid X<+\infty, Y\le y\}$$



$$D=\{(X,Y)\mid X\le x, Y\le y\}$$

D_2





D_1

*例1：已知 (X,Y) 的联合分布

$$F(x,y)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{e^y} & x>0,y\geq 0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$，求 (X,Y) 关于 X 和 Y 的边缘分布。

解：对 X，分 $x\leq 0$ 和 $x>0$ 两种情况：

$$x\leq 0\Rightarrow F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=0$$

$$x>0\Rightarrow F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)$$

$$=\lim_{y\to+\infty}(1-\frac{1}{e^y})=1$$

$$F(x,y)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{e^{y}} & x>0, y\geq 0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$x\leq 0\quad F_X(x)=0 \qquad x>0\quad F_X(x)=1$$

$$F_X(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{e^{y}} & y\geq 0\\ 0 & y<0\end{cases}$$

二. 边缘分布律

▲定义:

设 p_{ij} 是二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律，则称 $P\{X = x_i\} = \sum_j p_{ij} \quad (i = 1、2、3、\cdots)$ 为二维离散型随机变量 (X,Y) 关于 X 的边缘分布律，记作 $p_{i\bullet} = \sum_j p_{ij}$；

称 $P\{Y=y_j\}=\sum_i p_{ij}\quad (j=1、2、3、\cdots)$ 为二维离散型随机变量(X,Y)关于Y的边缘分布律，记作

$$p_{\bullet j}=\sum_i p_{ij}\ 。$$

***边缘分布律的基本性质：**

（1） $p_{i\bullet}\geq 0\qquad p_{\bullet j}\geq 0$

（2） $\sum_i p_{i\bullet}=\sum_i\sum_j p_{ij}=1$

$$\sum_j p_{\bullet j}=\sum_j\sum_i p_{ij}=1$$

＊例 2： 已知联合分布律，求边缘分布律。

解:

$\xi \backslash \eta$	1	2
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	0

$\xi \backslash \eta$	1	2	$p_{i\bullet}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
$p_{\bullet j}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

三．边缘密度函数

二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

……………………… (X,Y)关于X的边缘概率密度

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

……………………… (X,Y)关于Y的边缘概率密度

＊边缘分布密度的基本性质：

（1） $f_X(x)\ge 0 \quad f_Y(y)\ge 0$

（2） $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)dy=1$

＊例3：已知联合密度，求边缘分布密度。

$$f(x,y)=\begin{cases}9(x-1)^2(y-1)^2 & 1\le x\le 2, 1\le y\le 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

解：当 $1\le x\le 2$ 时：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{1}f(x,y)dy+\int_{1}^{2}f(x,y)dy+\int_{2}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{1}0dy+\int_{1}^{2}9\cdot(x-1)^2\cdot(y-1)^2dy+\int_{2}^{+\infty}0dy$$

$$=3\cdot(x-1)^2$$

$$f(x,y)=\begin{cases}9(x-1)^2(y-1)^2 & 1\le x\le 2,1\le y\le 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

当$1\le x\le 2$时： $f_X(x)=3\cdot(x-1)^2$

其余： $f_X(x)=0$

$$f_X(x)=\begin{cases}3\cdot(x-1)^2 & 1\le x\le 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}3\cdot(y-1)^2 & 1\le y\le 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$