“德化一中、永安一中、漳平一中”三校协作

2023—2024 学年第一学期联考

高三数学试题

第Ⅰ卷（选择题，共 60 分）

一、单项选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．）

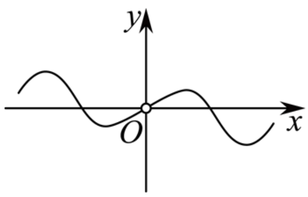
1. 若集合 $A=\{x\,|\,|x-1|\le 2, x\in \mathrm{N}\}$，$B=\{x\,|\,\ln x\le 0\}$，则 $A\cap B$ 的元素的个数是（　　）

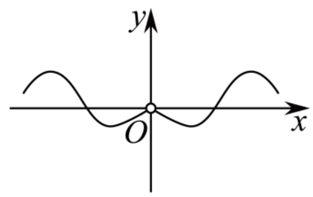
A. 1　　　B. 2　　　C. 3　　　D. 4

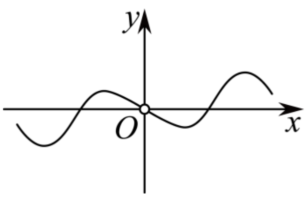
2. 复数 $z=\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}^5}$ 的虚部为（　　）

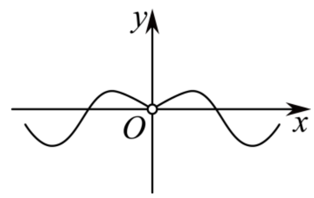
A. $-\dfrac{1}{2}$　　　B. $-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　　　C. $\frac{1}{2}$　　　D. $\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

3. 函数 $y=\sin x\cdot\ln\dfrac{x^2+2}{x^2}$ 的图象可能是（　　）．

A. 

B. 

C. 

D. 

4. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $a=2\sqrt{2}, c=4, \mathrm{C}=45°$，则 A 的值可以为（　　）

A. $30°$　　　B. $60°$　　　C. $120°$　　　D. $30°$ 或 $150°$

5. 若向量 $\vec{a}=(0,2,2)$，$\vec{b}=(1,0,\lambda)$，且 $(\vec{a}+\vec{b})\perp 2\vec{b}$，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量是（　　）

A. $2\vec{b}$　　　B. $\vec{b}$　　　C. $-\vec{b}$　　　D. $-2\vec{b}$

6. 设 $a=\dfrac{2^{2022}+1}{2^{2023}+1}$，$b=\dfrac{2^{2023}+1}{2^{2024}+1}$，则下列说法中正确的是（　　）

A. $a<b$　　　B. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^a<\left(\dfrac{1}{2}\right)^b$　　　C. $a^2+b^2\ge 2$　　　D. $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=2$

7. 我国古代的洛书中记载着世界上最古老的一个幻方：如图，将 1，2，3，…，9 填入 3×3 的方格内，使

三行，三列和两条对角线上的三个数字之和都等于 15．一般地，将连续的正整数 1，2，3，…，n^2 填入 $n\times n$ 的方格中，使得每行，每列和两条对角线上的数字之和都相等，这个正方形叫做 n 阶幻方．记 n 阶幻方的每列的数字之和为 N_n，如图，三阶幻方的 $N_3=15$，那么 $N_9=$（　　）

4	9	2
3	5	7
8	1	6

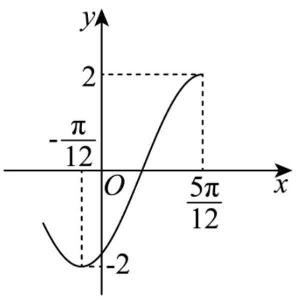
A. 41　　　　B. 369　　　　C. 1476　　　　D. 3321

8. 函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{2\ln x}{x}, x>0\\ \sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right), -\pi\le x\le 0\end{cases}$，若 $2f^2(x)-3f(x)+1=0$ 恰有 6 个不同实数解，正实数 ω 的范围为（　　）

A. $\left(\dfrac{10}{3},4\right]$　　　　B. $\left[\dfrac{10}{3},4\right)$　　　　C. $\left(2,\dfrac{10}{3}\right]$　　　　D. $\left[2,\dfrac{10}{3}\right)$

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的四个选项中，有多个选项符合题目要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分.）

9. 函数 $f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(\omega>0,\left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则（　　）



A. $\omega=2$

B. $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$

C. 点 $\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$ 是函数 $f\left(x\right)$ 图象的一个对称中心

D. 直线 $x=\frac{11\pi}{12}$ 是函数 $f\left(x\right)$ 图象的对称轴

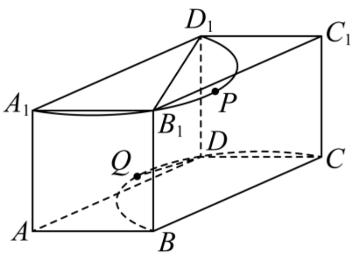
10. 已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2^n\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$，则下列结论正确的是（　　）

A. $a_4=13$　　　　B. $\left\{a_n\right\}$ 是递增数列　　　　C. $a_{10}<1000$　　　　D. $a_{n+1}=2a_n+1$

11. 已知函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，若 $g\left(x\right)+f\left(x\right)=1$，且 $g\left(x+1\right),f\left(2-x\right)$ 均为奇函数，则（　　）

A. $g\left(0\right)=-1$　　　　B. $g\left(1\right)=0$　　　　C. $g\left(2\right)=1$　　　　D. $g\left(3\right)=0$

12. 如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，$\angle BAD=60^\circ,AB=AA_1=1$，点 P 是经过点 B_1 的半圆弧 $\overset{\frown}{A_1D_1}$ 上的动点（不包括端点），点 Q 是经过点 D 的半圆弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上的动点（不包括端点），则下列说法正确的是（　　）



A. 四面体 $PBCQ$ 的体积的最大值为 $\frac{1}{3}$

B. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{A_1P}$ 的取值范围是 $[0,4]$

C. 若二面角 C_1-QB-C 的平面角为 θ，则 $\tan\theta>\frac{1}{2}$

D. 若三棱锥 $P-BCQ$ 的外接球表面积为 S，则 $S\in\left[4\pi,13\pi\right)$

第Ⅱ卷（非选择题，共 90 分）

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13. 已知角 α 的顶点为原点，始边为 x 轴的非负半轴，若其终边经过点 $P\left(-1,2\right)$，$\frac{\sin2\alpha}{\cos^2\alpha+1}=$___.

14. 命题"$\exists x\in \mathrm{R}$，$ax^2+ax+1\le 0$"为假命题，则实数 a 的取值范围是______.

15. 设点 P_1，P_2，P_3 在 $\odot O$ 上，若 $\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}=\vec{0}$，则 $\angle P_1P_2P_3=$_________.

16. 已知无穷等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 中的各项均大于 0，且 $a_1+a_3^2+a_5=8$，则 $\frac{a_3}{a_1}-\frac{a_{11}}{a_3}$ 的范围为_____________.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17. 已知函数 $f\left(x\right)=2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\sin\left(\pi+x\right)\cos x-\sqrt{3}$

（1）当 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，求 $f\left(x\right)$ 的最值，及取最值时对应的 x 的值；

（2）在 $\triangle ABC$ 中，A 为锐角，且 $f(A)=\sqrt{3},a=\sqrt{3},b+c=2\sqrt{3}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-x^2-a$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象在 $x=0$ 处的切线为 $y=ax$.

（1）设 $g\left(x\right)=f\left(x\right)+x^2-x$，求 $g\left(x\right)$ 的最小值；

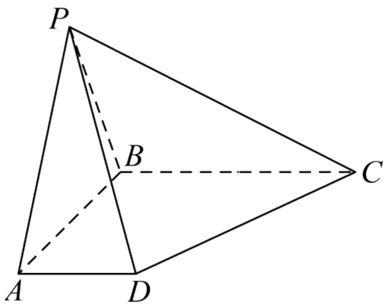
（2）若 $\frac{f\left(x\right)}{x}>k$ 对任意的 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

19. 已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，且 $2nS_{n+1}-2\left(n+1\right)S_n=n\left(n+1\right)\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$.

（1）求证：数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列；

（2）已知等差数列 $\left\{b_n\right\}$ 满足 $b_3=5$，其前 9 项和为 63．令 $c_n=\frac{1}{a_nb_n}$，设数列 $\left\{c_n\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，求证：$\frac{1}{3}\le T_n<\frac{3}{4}$.

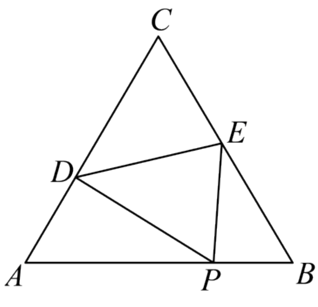
20. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\triangle PAB$ 是边长为 2 的正三角形，$BC=AB$，$AD//BC$，$BC=2AD$，$AB\perp BC$，平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$.



（1）设平面 $PAB\cap$ 平面 $PCD=l$，问：线段 PB 上是否存在一点 E，使 $l//$ 平面 ADE？

（2）平面 PAB 与平面 PCD 的夹角的余弦值.

21. 已知 $\triangle ABC$ 的三个角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$c(\cos A-\sqrt{3}\sin A)=b-2a$，$c=2$.



（1）求角 C；

（2）若 $AB=BC$，在 $\triangle ABC$ 的边 AC 和 BC 上分别取点 D，E，将 $\triangle CDE$ 沿线段 DE 折叠到平面 ABE 后，顶点 C 恰好落在边 AB 上（设为点 P），设 $CE=x$，当 CE 取最小值时，求 $\triangle PBE$ 的面积.

22. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax-\dfrac{1}{x}$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）函数 $f(x)$ 有两个零点 $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$，求证：$x_1x_2>2\mathrm{e}^2$.

“德化一中、永安一中、漳平一中”三校协作

2023—2024 学年第一学期联考

高三数学试题

第 I 卷（选择题，共 60 分）

一、单项选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．）

1. 若集合 $A=\left\{x\mid |x-1|\le 2,x\in \mathrm{N}\right\}$，$B=\left\{x\mid \ln x\le 0\right\}$，则 $A\cap B$ 的元素的个数是（　　）

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

【答案】A

【解析】

【分析】结合解不等式以及对数函数的单调性，求得集合 A,B，根据集合的交集运算，即可得答案.

【详解】由题意得 $A=\left\{x\mid |x-1|\le 2,x\in \mathrm{N}\right\}=\left\{x\mid -1\le x\le 3,x\in \mathrm{N}\right\}=\{0,1,2,3\}$，

$B=\left\{x\mid \ln x\le 0\right\}=\{x\mid 0<x\le 1\}$，

故 $A\cap B=\{1\}$，即 $A\cap B$ 的元素的个数是 1 个，

故选：A

2. 复数 $z=\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}^5}$ 的虚部为（　　）

A. $-\dfrac{1}{2}$　　　　B. $-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　　　　C. $\dfrac{1}{2}$　　　　D. $\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

【答案】C

【解析】

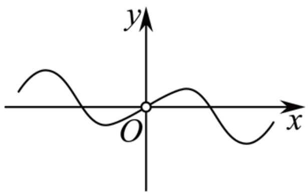
【分析】根据 i 的性质、复数的除法运算可得答案.

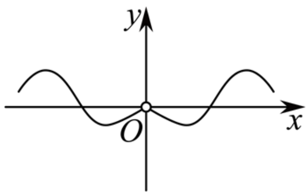
【详解】$z=\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}^5}=\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{-1+\mathrm{i}}{2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{i}}{2}$，

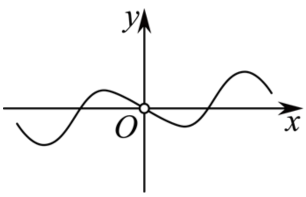
所以 z 的虚部为 $\dfrac{1}{2}$.

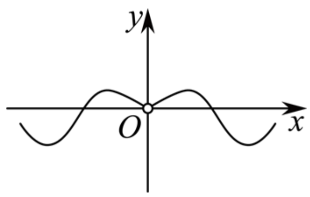
故选：C.

3. 函数 $y=\sin x\cdot\ln\dfrac{x^2+2}{x^2}$ 的图象可能是（　　）.

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】A

【解析】

【分析】利用排除法，结合函数的奇偶性以及函数值的符号分析判断.

【详解】因为 $y=f\left(x\right)=\sin x\cdot\ln\dfrac{x^2+2}{x^2}$ 定义域为 $\left\{x\middle|x\neq 0\right\}$，

且 $f\left(-x\right)=\sin\left(-x\right)\cdot\dfrac{\left(-x\right)^2+2}{\left(-x\right)^2}=-\sin x\cdot\ln\dfrac{x^2+2}{x^2}=-f\left(x\right)$，

所以 $y=\sin x\cdot\ln\dfrac{x^2+2}{x^2}$ 为奇函数，函数图象关于原点对称，故 B，D 都不正确；

对于 C，$x\in\left(0,\pi\right)$ 时，$\sin x>0$，$\dfrac{x^2+2}{x^2}=1+\dfrac{2}{x^2}>1$，

所以 $\ln\dfrac{x^2+2}{x^2}>0$，所以 $y=\sin x\cdot\ln\dfrac{x^2+2}{x^2}>0$，故 C 不正确；

对于选项 A，符合函数图象关于原点对称，也符合 $x\in\left(0,\pi\right)$ 时，$y=\sin x\cdot\ln\dfrac{x^2+2}{x^2}>0$，故 A 正确.

故选：A.

4. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $a=2\sqrt{2},c=4,\mathrm{C}=45°$, 则 A 的值可以为（　　）

A. $30°$　　　　B. $60°$　　　　C. $120°$　　　　D. $30°$ 或 $150°$

【答案】A

【解析】

【分析】由正弦定理求出 $\sin A=\dfrac{1}{2}$，结合 $A\in\left(0°,135°\right)$ 求出答案.

【详解】由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，即 $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin A}=\dfrac{4}{\sin 45°}$，

故 $\sin A=\dfrac{1}{2}$，

因为 $C=45°$，所以 $A\in\left(0°,135°\right)$，故 $A=30°$.

故选：A

5. 若向量 $\vec{a}=(0,2,2)$，$\vec{b}=(1,0,\lambda)$，且 $(\vec{a}+\vec{b})\perp 2\vec{b}$，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量是（　　）

A. $2\vec{b}$　　B. $\vec{b}$　　C. $-\vec{b}$　　D. $-2\vec{b}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据空间向量的坐标运算求出 $\lambda=-1$，再根据投影向量的定义即可求解.

【详解】$\because \vec{a}=(0,2,2)$，$\vec{b}=(1,0,\lambda)$，

$\therefore \vec{a}+\vec{b}=\left(1,2,2+\lambda\right)$，$2\vec{b}=(2,0,2\lambda)$

$\because (\vec{a}+\vec{b})\perp 2\vec{b}$，

$\therefore (\vec{a}+\vec{b})\cdot 2\vec{b}=2+\left(2+\lambda\right)2\lambda=0$，解得 $\lambda=-1$，

$\therefore \vec{b}=(1,0,-1)$，

$\therefore \vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量为 $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\vec{b}}{\sqrt{2}}=-\vec{b}$.

故选：C.

6. 设 $a=\dfrac{2^{2022}+1}{2^{2023}+1}$，$b=\dfrac{2^{2023}+1}{2^{2024}+1}$，则下列说法中正确的是（　　）

A. $a<b$　　B. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^a<\left(\dfrac{1}{2}\right)^b$　　C. $a^2+b^2\ge 2$　　D. $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=2$

【答案】B

【解析】

【分析】根据 a,b 的结构特征构造函数 $f\left(x\right)=\dfrac{2^x+1}{2^{x+1}+1}$，判断其单调性，即可判断 A；结合指数函数的单调性，判断 B；根据 a,b 的范围判断 C，利用基本不等式以及等号成立条件判断 D.

【详解】设 $f\left(x\right)=\dfrac{2^x+1}{2^{x+1}+1}$，则 $f\left(x\right)=\dfrac{\frac{1}{2}\left(2^{x+1}+1\right)+\frac{1}{2}}{2^{x+1}+1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{2^{x+1}+1}$，

因为 $y=2^{x+1}$ 在 R 上单调递增，故 $f\left(x\right)$ 在 R 上单调递减，

所以 $f\left(2022\right)>f\left(2023\right)$，即 $\frac{2^{2022}+1}{2^{2023}+1}>\frac{2^{2023}+1}{2^{2024}+1},\therefore a>b$，A 错误，

因为 $y=(\frac{1}{2})^x$ 在 R 上单调递减，故 $\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$，B 正确；

由于 $0<\frac{2^{2022}+1}{2^{2023}+1}<1,0<\frac{2^{2023}+1}{2^{2024}+1}<1$，即 $0<a,b<1$，

故 $a^2+b^2<2$，C 错误；

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$，当且仅当 $a=b$ 时取等号，

但 $a>b$，故 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$，D 错误，

故选：B

7. 我国古代的洛书中记载着世界上最古老的一个幻方：如图，将 1，2，3，…，9 填入 3×3 的方格内，使三行，三列和两条对角线上的三个数字之和都等于 15．一般地，将连续的正整数 1，2，3，…，n^2 填入 $n\times n$ 的方格中，使得每行，每列和两条对角线上的数字之和都相等，这个正方形叫做 n 阶幻方．记 n 阶幻方的每列的数字之和为 N_n，如图，三阶幻方的 $N_3=15$，那么 $N_9=$（　　）

4	9	2
3	5	7
8	1	6

A. 41　　B. 369　　C. 1476　　D. 3321

【答案】B

【解析】

【分析】直接利用等差数列的性质及求和公式求解即可.

【详解】由等差数列的性质得：九阶幻方所有数字之和为 $\frac{81}{2}(1+81)=3321$，

由于每列和对角线上的数字之和都相等，

所以每列的数字之和为 $\frac{3321}{9}=369$，

故选：B.

8. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\ln x}{x},x>0\\ \sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right),-\pi\le x\le 0\end{cases}$，若 $2f^2(x)-3f(x)+1=0$ 恰有 6 个不同实数解，正实数 ω 的范围为（　　）

A. $\left(\dfrac{10}{3},4\right]$　　B. $\left[\dfrac{10}{3},4\right)$　　C. $\left(2,\dfrac{10}{3}\right]$　　D. $\left[2,\dfrac{10}{3}\right)$

【答案】D

【解析】

【分析】把问题转化为 $y=f(x)$ 与 $y=1$ 或 $y=\dfrac{1}{2}$ 的交点，画出图形，数形结合，再结合单调性和对称性求出参数范围即可.

【详解】由题知，

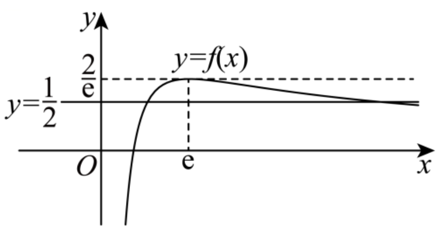
$2f^2(x)-3f(x)+1=0$ 的实数解可转化为 $f(x)=\dfrac{1}{2}$ 或 $f(x)=1$ 的实数解，即 $y=f(x)$ 与 $y=1$ 或 $y=\dfrac{1}{2}$ 的交点，

当 $x>0$ 时，$f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}$

所以 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

$x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

如图所示：



所以 $x=\mathrm{e}$ 时 $f(x)$ 有最大值：$\dfrac{1}{2}<f(x)_{\max}=\dfrac{2}{\mathrm{e}}<1$

所以 $x>0$ 时，由图可知 $y=f(x)$ 与 $y=1$ 无交点，即方程 $f(x)=1$ 无解，

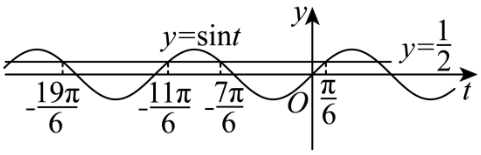
$y=f(x)$ 与 $y=\dfrac{1}{2}$ 有两个不同交点，即方程 $f(x)=\dfrac{1}{2}$ 有2解

当 $x<0$ 时，因为 $\omega>0$，$-\pi\leqslant x\leqslant 0$，

所以 $-\omega\pi+\frac{\pi}{6}\le\omega x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{6}$，

令 $t=\omega x+\frac{\pi}{6}$，则 $t\in\left[-\omega\pi+\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$

则有 $y=\sin t$ 且 $t\in\left[-\omega\pi+\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$，如图所示：



因为 $x>0$ 时，已有两个交点，

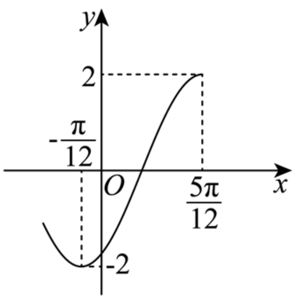
所以只需保证 $y=\sin t$ 与 $y=\frac{1}{2}$ 及与 $y=1$ 有四个交点即可，

所以只需 $-\frac{19\pi}{6}<-\omega\pi+\frac{\pi}{6}\le-\frac{11\pi}{6}$，解得 $2\le\omega<\frac{10}{3}$.

故选：D

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的四个选项中，有多个选项符合题目要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分.）

9. 函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则（　　）



A. $\omega=2$

B. $\varphi=\frac{\pi}{3}$

C. 点 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ 是函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心

D. 直线 $x=\frac{11\pi}{12}$ 是函数 $f(x)$ 图象的对称轴

【答案】ACD

【解析】

【分析】A 选项，根据图象得到函数最小正周期，进而得到 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$；B 选项，将 $\left(-\frac{\pi}{12},-2\right)$ 代入解析式，求出 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$；C 选项，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$，C 正确；D 选项，计算出 $f\left(\frac{11\pi}{12}\right)=-2$，故 D 正确.

【详解】A 选项，设 $f\left(x\right)$ 的最小的正周期为 T，

由图象可知，$\frac{1}{2}T=\frac{5}{12}\pi-\left(-\frac{1}{12}\pi\right)=\frac{1}{2}\pi$，解得 $T=\pi$，

因为 $\omega>0$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，A 正确；

B 选项，将 $\left(-\frac{\pi}{12},-2\right)$ 代入 $f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\varphi\right)$ 中得，$2\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=-2$，

故 $-\frac{\pi}{6}+\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，即 $\varphi=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$，

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以只有当 $k=0$ 时，满足要求，

故 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$，B 错误；

C 选项，$f\left(x\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，故 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=0$，

故点 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ 是函数 $f\left(x\right)$ 图象的一个对称中心，C 正确；

D 选项，$f\left(\frac{11\pi}{12}\right)=2\sin\left(\frac{11\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=-2$，

故直线 $x=\frac{11\pi}{12}$ 是函数 $f\left(x\right)$ 图象的对称轴，D 正确.

故选：ACD

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2^n\left(n\in N^*\right)$，则下列结论正确的是（　　）

A. $a_4=13$　　B. $\{a_n\}$ 是递增数列　　C. $a_{10}<1000$　　D. $a_{n+1}=2a_n+1$

【答案】BD

【解析】

【分析】根据题意，化简得到 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-1=\frac{1}{2}(\frac{a_n}{2^n}-1)$，得到 $\left\{\frac{a_n}{2^n}-1\right\}$ 表为等比数列，进而求得数列的通项公式 $a_n=2^n-1$，结合选项，逐项判定，即可求解.

【详解】由 $a_{n+1}=a_n+2^n$，可得 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$，则 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-1=\frac{1}{2}(\frac{a_n}{2^n}-1)$，

又由 $a_1=1$，可得 $\frac{a_1}{2}-1=-\frac{1}{2}$，所以数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}-1\right\}$ 表示首项为 $-\frac{1}{2}$，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，

所以 $\frac{a_n}{2^n}-1=-\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}=-(\frac{1}{2})^n$，所以 $a_n=2^n-1$，

由 $a_4=2^4-1=15$，所以 A 不正确；

由 $a_{n+1}-a_n=2^{n+1}-1-2^n+1=2^n>0$，即 $a_{n+1}>a_n$，所以 $\{a_n\}$ 是递增数列，所以 B 正确；

由 $a_{10}=2^{10}-1=1023>1000$，所以 C 错误；

由 $a_{n+1}=2^{n+1}-1$，$2a_n+1=2\cdot2^n-2+1=2^{n+1}-1$，所以 $a_{n+1}=2a_n+1$，所以 D 正确.

故选：BD.

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，若 $g(x)+f(x)=1$，且 $g(x+1),f(2-x)$ 均为奇函数，则（　　）

A. $g(0)=-1$　　B. $g(1)=0$　　C. $g(2)=1$　　D. $g(3)=0$

【答案】ABC

【解析】

【分析】根据奇函数定义可得 $g(x)=-g(-x+2)$，$f(x)=-f(4-x)$，即可代值逐一求解.

【详解】因为 $g(x+1),f(2-x)$ 均为奇函数，所以 $g(x+1)=-g(-x+1),f(2-x)=-f(2+x)$，即 $g(x)=-g(-x+2)$①，$f(x)=-f(4-x)$，

因为 $g(x)+f(x)=1$，即 $f(x)=1-g(x)$，所以 $1-g(x)=-[1-g(4-x)]$，即 $g(x)+g(4-x)=2$②.

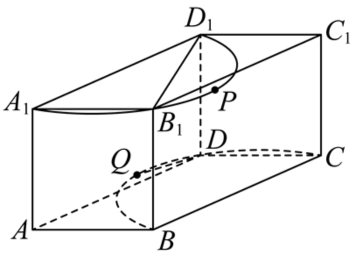
由①，取 $x=1$ 得 $g(1)=0$，

由②，令 $x=2$，得 $g(2)=1$；令 $x=3$，得 $g(3)+g(1)=2$，所以 $g(3)=2$.

由①，令 $x=0$，得 $g(0)=-g(2)=-1$.

故选：ABC

12. 如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，$\angle BAD=60^\circ$, $AB=AA_1=1$，点 P 是经过点 B_1 的半圆弧 $\overset{\frown}{A_1D_1}$ 上的动点（不包括端点），点 Q 是经过点 D 的半圆弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上的动点（不包括端点），则下列说法正确的是（　　）



A. 四面体 $PBCQ$ 的体积的最大值为 $\frac{1}{3}$

B. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{A_1P}$ 的取值范围是 $[0,4]$

C. 若二面角 C_1-QB-C 的平面角为 θ，则 $\tan\theta>\frac{1}{2}$

D. 若三棱锥 $P-BCQ$ 的外接球表面积为 S，则 $S\in[4\pi,13\pi)$

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据棱锥的体积公式可判断 A；根据向量的相等以及数量积的定义可判断 B；结合二面角平面角定义找出 θ，结合解直角三角形判断 C；确定三棱锥 $P-BCQ$ 的外接球球心位置，列等式求得半径表达式，求得其取值范围，即可求出三棱锥 $P-BCQ$ 外接球表面积取值范围，判断 D.

【详解】由题意知在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，半圆弧 $\overset{\frown}{BC}$ 经过点 D，故 $BC=2$，

点 P 到底面 $ABCD$ 的距离为 $AA_1=1$，

当点 Q 位于半圆弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上的中点时 $S_{\triangle BCQ}$ 最大，即四面体 $PBCQ$ 体积最大，

则 $\left(V_{P-BCQ}\right)_{\max}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times1=\frac{1}{3}$ ，故 A 正确；

由于 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A_1D_1}$，则 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{A_1D_1}\cdot\overrightarrow{A_1P}$，

又在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1PD_1$ 中， $\cos\angle D_1AP=\frac{A_1P}{A_1D_1}$ ，

故 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{A_1D_1}\cdot\overrightarrow{A_1P}=|\overrightarrow{A_1D_1}||\overrightarrow{A_1P}|\cos\angle D_1A_1P=4\cos^2\angle D_1A_1P$，

因为 $\angle D_1A_1P\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos\angle D_1A_1P\in(0,1)$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{A_1P}\in(0,4)$，故 B 错误；

因为 $CC_1\perp$ 平面 $ABCD$，$QB\subset$ 平面 $ABCD$，故 $CC_1\perp QB$，而 $QB\perp QC$，

$CC_1\cap QC=C,CC_1,QC\subset$ 平面 C_1CQ，故 $QB\perp$ 平面 C_1CQ，$C_1Q\subset$ 平面 C_1CQ，

故 $QB\perp C_1Q$，所以 $\angle C_1QC$ 是二面角 C_1-QB-C 的平面角，