JINSW
本科
10

立信会计学院

数统系

概率论与数理统计

１０

Jinsw

*注：在实际中，通常用对数正态分布来描述价格的分布，特别是在金融市场的理论研究中，如著名的期权定价公式（Black—Scholes 公式），以及许多实证研究都用对数正态分布来描述金融资产的价格。设某种资产当前价格为 P_0，考虑单期投资问题，到期时该资产的价格为一个随机变量，记作 P_1，设投资于该资产的连续复合收益率为 r，则有 $P_1 = P_0 e^r$ 从而 $r = \ln(P_1 / P_0) = \ln P_1 - \ln P_0$，注意到 P_0 为当前价格，是已知常数，因而假设价格 P_1 服从对数正态分布实际上等价于假设连续复合收益率 r 服从正态分布。

*例 8：设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，求 $Y=\min\{X,2\}$ 的分布函数。

解：$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\min\{X,2\}\le y\}$$

$$=1-P\{\min\{X,2\}>y\}=1-P\{X>y,2>y\}$$

当 $y<2$ 时，

$$F_Y(y)=1-P\{X>y\}=P\{X\le y\}=F_X(y)$$

当 $y\ge 2$ 时，

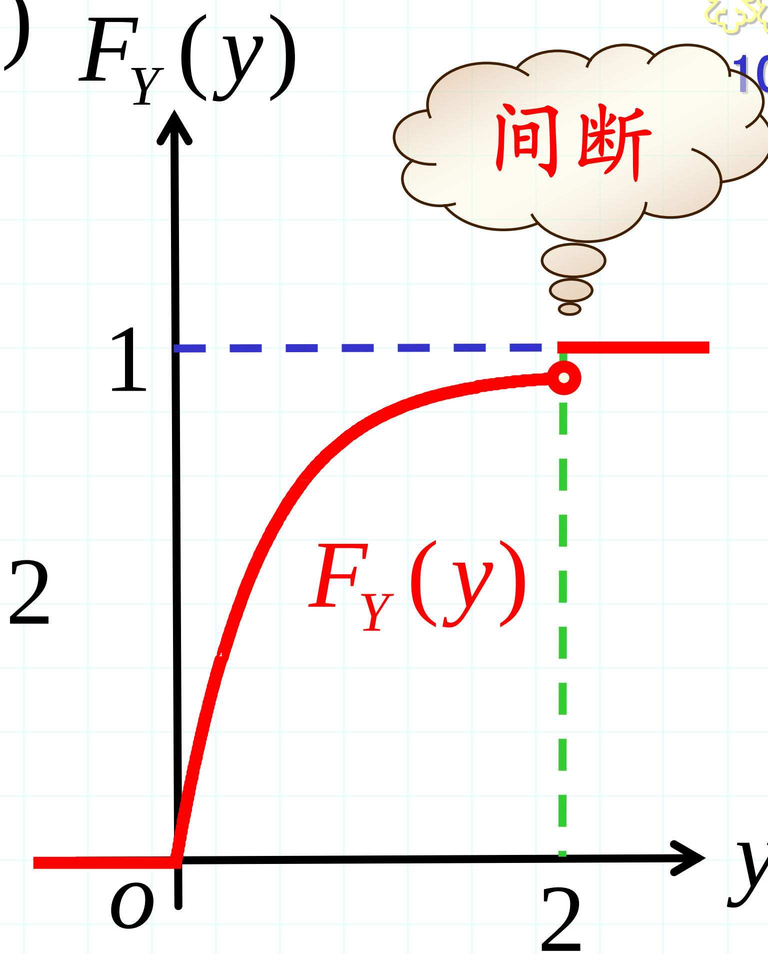
$$P\{X>y,2>y\}=0 \quad F_Y(y)=1$$

当 $y<2$ 时，$F_Y(y)=F_X(y)$

当 $y\geq 2$ 时，$F_Y(y)=1$

即：

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y\leq 0\\ 1-e^{-\lambda y} & 0\leq y<2\\ 1 & y\geq 2\end{cases}$$



* 注：

本例中，虽然 X 是连续型随机变量，但 Y 不是连续型随机变量也不是离散型随机变量，Y 的分布函数在 $y=2$ 处间断。

第三章

多维随机变量
及其分布

在实际应用中，有些随机现象需要同时用两个或两个以上的随机变量来描述。

如：研究某地区学龄前儿童的发育情况时，就要同时抽查儿童的身高 H、体重 W，这里，H 和 W 是定义在同一个样本空间 $\Omega=\{e\}=\{$某地区的全部学龄前儿童$\}$ 上的两个随机变量。

在这种情况下，我们不但要研究多个随机变量各自的统计规律，而且还要研究它们之间的统计相依关系，因而还需考察它们的联合取值的统计规律，即多维随机变量的分布。由于从二维推广到多维一般无实质性的困难，故我们重点讨论**二维随机变量**。

§３．１二维随机变量

需要用两个随机变量同时表示其结果的随机试验————二维随机变量

一．二维随机变量及其分布

＊引例：

考察运动员的素质：身高、体重

————二维随机变量

一个随机试验的结果需用一组有序数组来表达，则这一有序数组构成了一个多维随机变量。

▲定义：

如果一个随机试验的结果用两个随机变量 X_1, X_2 来描述，则称这两个随机变量组成的有序数组 (X_1, X_2) 为一个二维随机变量。

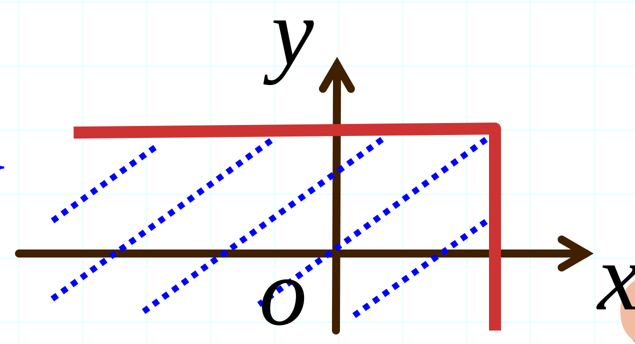
$$F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\} \quad x, y \in R$$

————联合分布函数

(X,Y) ————————平面上点的坐标

$F(x,y)$ ——点 (X,Y) 落在 D 上的概率

$$D = \{(X,Y) \mid X \le x, Y \le y\}$$

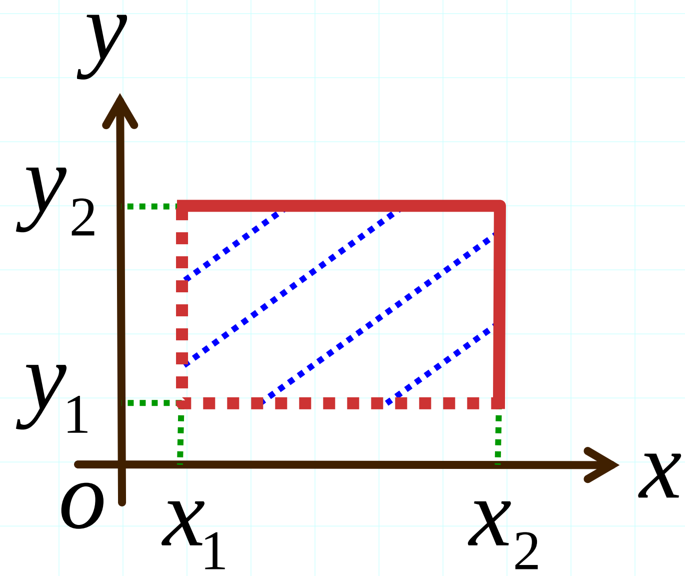


$$P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$

$$D = \{(X, Y) \mid x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$$

且对任意的 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，$x_1 < x_2$，$y_1 < y_2$ 一定有



$$P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\} \ge 0$$

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \ge 0$$

* 联合分布 $F(x,y)$ 的性质:

性质 1： $0 \le F(x,y) \le 1$

性质 2： $F(x,y)$ 对 x 和 y 分别是单调不减的。

如果 $x_1 < x_2$，则 $F(x_1,y) \le F(x_2,y)$；

如果 $y_1 < y_2$，则 $F(x,y_1) \le F(x,y_2)$；

性质 3： $F(x,y)$ 对 x 和 y 分别是右连续的。

$$\lim_{x \to x_0^+} F(x,y) = F(x_0,y) \quad \lim_{y \to y_0^+} F(x,y) = F(x,y_0)$$

性质 4： $\lim_{x \to -\infty} F(x,y) = 0 \qquad \lim_{y \to -\infty} F(x,y) = 0$

$$\lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F(x,y) = 0 \qquad \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x,y) = 1$$

*例1：设二维随机变量(x, y)的分布函数为

$$F(x,y)=A[B+\arctan(x/2)][C+\arctan(y/3)]$$

，$x\in R$，$y\in R$（1）试确定常数A,B,C；（2）求事件$\{2<X<+\infty, 0<Y\le 3\}$的概率。

解：$F(x,y)=A\left(B+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(C+\arctan\frac{y}{3}\right)$

$$\begin{cases} F(+\infty,+\infty)=A(B+\pi/2)(C+\pi/2)=1 \\ F(-\infty,+\infty)=A(B-\pi/2)(C+\pi/2)=0 \\ F(+\infty,-\infty)=A(B+\pi/2)(C-\pi/2)=0 \end{cases}$$

$$B=C=\pi/2, A=1/\pi^2$$

10

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right)$$

$$P\{2<X<+\infty,0<Y\le 3\}$$

$$=F(+\infty,3)-F(+\infty,0)-F(2,3)+F(2,0)$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-$$

$$-\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{2}+0\right)$$

$$=\frac{1}{16}$$

二．二维离散型随机变量

▲定义：

设(X,Y)是二维随机变量，如果(X,Y)的所有可能取值是有限或可列的，则称(X,Y)为二维离散型随机变量。

$$(X,Y)=(x_i,y_j)\quad (i,j=1、2、3、\cdots)$$

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}\quad (i,j=1、2、3、\cdots)$$

————(X,Y)的联合分布律

列表形式:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

*联合分布律 p_{ij} $(i, j = 1、2、3、\cdots)$ 的基本性质：

（1） $p_{ij} \ge 0$　　（2） $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$

对离散型随机变量而言，联合概率分布不仅比联合分布函数更加直观，而且能够更加方便地确定 (X,Y) 取值于任何区域 D 上的概率，即

$$P\{(X,Y) \in D\} = \sum_{(x_i, y_j) \in D} p_{ij}$$

由联合概率分布可以确定联合分布函数：

$$F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\} = \sum_{x_i \le x, y_j \le y} p_{ij}$$