2023-2024学年江苏省无锡市高二上学期期中教学质量调研测试数学试卷

一、单选题：本题共**8**小题，每小题**5**分，共**40**分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 直线$x-y+1=0$的倾斜角为(　　)

A. $-\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{3\pi}{4}$

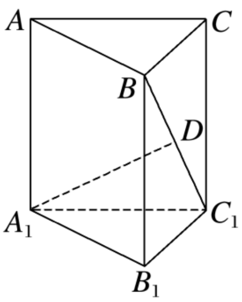
2. 空间直角坐标系中，点$P(1,-2,-2)$关于*xOz*平面的对称点坐标为.(　　)

A. $(-1,2,2)$　　B. $(1,2,-2)$　　C. $(-1,-2,2)$　　D. $(1,-2,2)$

3. 已知圆$C_1:(x+1)^2+(y-3)^2=4$，圆$C_2:(x-2)^2+(y+1)^2=9$，则圆C_1与圆C_2的位置关系是(　　)

A. 相离　　B. 相交　　C. 内切　　D. 外切

4. 如图，*D*是三棱柱$A_1B_1C_1-ABC$中侧面BB_1C_1C的中心，若$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{c}$，则$\overrightarrow{A_1D}=$(　　)



A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{c}$　　B. $\frac{1}{2}\overrightarrow{a}-\frac{1}{2}\overrightarrow{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{c}$

C. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}-\frac{1}{2}\overrightarrow{c}$　　D. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{c}$

5. 已知两点$A(1,-2)$，$B(2,1)$，若直线*l*：$y=kx-1$与线段*AB*有交点，则实数*k*的取值范围为.(　　)

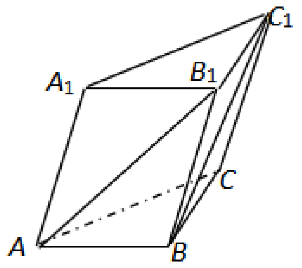
A. $(-\infty,-1]$　　B. $[1,+\infty)$

C. $[-1,1]$　　D. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

6. 若关于*x*的方程$x+b=\sqrt{4-x^2}$有两个不同实数解，则实数*b*的取值范围为(　　)

A. $[2,2\sqrt{2})$　　B. $[-2,2\sqrt{2}]$　　C. $(0,2\sqrt{2}]$　　D. $(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$

7. 如图，三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的底面为等边三角形，且底边长和侧棱长相等，$\angle BAA_1=\angle CAA_1=60^\circ$，则异面直线$AB_1$与$BC_1$所成角的余弦值为(　)



A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　　　C. $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$　　　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

8. 已知*A*，*B*是圆*C*：$(x-2)^2+(y-m)^2=4(m>0)$上两个动点，且$AB=2\sqrt{3}$.设*P*为*AB*的中点，且$Q(2,-1)$，若存在点*P*使得$PQ=\sqrt{5}$，则实数*m*的取值范围为(　)

A. $[\sqrt{5}-2,\sqrt{5}]$　　　　B. $[\sqrt{5}-2,2]$

C. $[2,2+\sqrt{5}]$　　　　D. $[\sqrt{5},2+\sqrt{5}]$

二、多选题：本题共**4**小题，共**20**分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得**5**分，部分选对的得**2**分，有选错的得**0**分。

9. 已知$\overrightarrow{v}$为直线*l* 的方向向量，$\overrightarrow{n_1}$、$\overrightarrow{n_2}$分别为平面α,β的法向量$(\alpha,\beta$不重合$)$，则正确的判断是(　)

A. 若$\overrightarrow{n_1}//\overrightarrow{n_2}$，则$\alpha//\beta$　　　　B. 若$\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$，则$\alpha\perp\beta$

C. 若$\overrightarrow{v}//\overrightarrow{n_1}$，则$l//\alpha$　　　　D. 若$\overrightarrow{v}\perp\overrightarrow{n_1}$，则$l//\alpha$或$l\subset\alpha$

10. 关于空间向量$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$，下列说法正确的是.(　)

A. 若$\overrightarrow{a}$与$\overrightarrow{b}$共线，$\overrightarrow{b}$与$\overrightarrow{c}$共线，则$\overrightarrow{a}$与$\overrightarrow{c}$共线

B. 若存在实数λ、μ，使得$\overrightarrow{c}=\lambda\overrightarrow{a}+\mu\overrightarrow{b}$，则$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$共面

C. 若$\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$是空间的一个基底，且$\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}$，则*A*，*B*，*C*，*D*四点共面

D. 若$\{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\}$是空间的一个基底，则$\{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b},\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c},\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}\}$也是空间的一个基底

11. 已知直线*l*：$y=kx+2k+2(k\in\mathbf{R})$，圆*C*：$x^2+(y-1)^2=9$，则下列说法正确的是.(　)

A. 直线*l*过定点$(-2,2)$

B. 圆心*C*到直线*l*距离的最大值是$2\sqrt{2}$

C. 直线*l*被圆*C*截得的弦长最小值为4

D. 若点$P(m,n)$在圆*C*上，m^2+n^2范围为$[4,16]$

12. 古希腊著名数学家阿波罗尼斯与欧几里得、阿基米德齐名，他发现：平面内到两个定点 A、B 的距离之比为定值 $\lambda(\lambda\neq 1)$ 的点所形成的图形是圆．后来，人们将这个圆以他的名字命名，称为阿波罗尼斯圆，简称阿氏圆．已知在平面直角坐标系 xOy 中，$A(-2,0)$，$B(4,0)$. 点 P 满足 $\dfrac{|PA|}{|PB|}=\dfrac{1}{2}$，设点 P 所构成的曲线为 C，下列结论正确的是(　)

A. C 的方程为 $(x+4)^2+y^2=16$

B. 在 C 上存在点 D，使得 $|AD|=3$

C. 在 C 上存在点 M，使得 M 在直线 $x+y-2=0$ 上

D. 在 C 上存在点 N，使得 $|NO|^2+|NA|^2=4$

三、填空题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分。

13. 圆 $C_1:(x-1)^2+(y+2)^2=2$ 与圆 C_2：$x^2+y^2=5$ 相交所得公共弦所在直线的方程为__________.

14. 已知空间向量 $\overrightarrow{a}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{b}=(-1,0,2)$，且 $(k\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\perp(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$，则实数 $k=$__________.

15. 写出一个半径为 1，且与圆 O：$x^2+y^2=1$ 及直线 l：$x=-1$ 都相切的圆的方程__________.

16. 从点 $A(-3,3)$ 发出的光线 l 射到 x 轴上被 x 轴反射后，照射到圆 C：$x^2+y^2-4x-4y+7=0$ 上，若反射光线穿过圆 C 的圆心，则反射光线方程为__________；若反射光线被圆 C 遮挡，则反射点横坐标的取值区间长度为__________.

四、解答题：本题共 **6** 小题，共 **70** 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（本小题 10 分）

已知 a 为实数，设直线 l_1：$(a+2)x+y+1=0$，l_2：$3x+ay+(4a-3)=0$.

(1) 若 $l_1\perp l_2$，求 a 的值；

(2) 若 $l_1// l_2$，求 l_1 与 l_2 的距离.

18.（本小题 12 分）

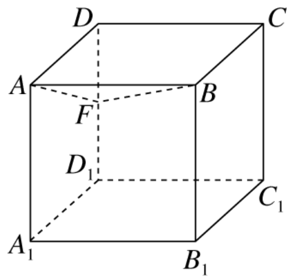
已知圆 C 经过点 $A(2,-1)$，和直线 $x+y=1$ 相切，且圆心在直线 $y=-2x$ 上.

(1) 求圆 C 的方程；

(2) 已知直线 l 经过原点，并且被圆 C 截得的弦长为 2，求直线 l 的方程.

19.（本小题 12 分）

如图所示，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，若 F 是 DD_1 的中点，



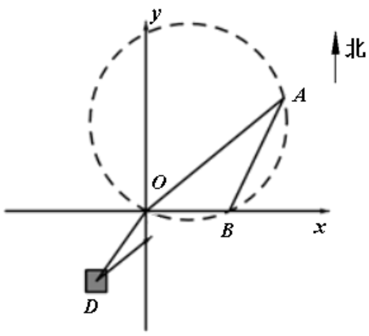
(1) 求异面直线 AD 与 BF 所成角的余弦值；

(2) 直线 B_1C 与平面 ABF 是否垂直？请说明理由；

(3) 求 B_1 到平面 ABF 的距离．

20.（本小题 12 分）

如图，某海面上有 O、A、B 三个小岛（面积大小忽略不计），A 岛在 O 岛的北偏东 45° 方向距 O 岛 $4\sqrt{2}$ 海里处，B 岛在 O 岛的正东方向距 O 岛 2 海里处，以 O 为坐标原点，O 的正东方向为 x 轴的正方向，1 海里为单位长度，建立平面直角坐标系．圆 C 经过 O、A、B 三点．

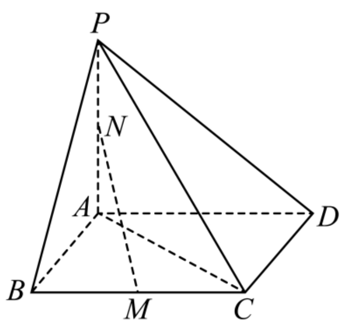


(1) 求圆 C 的方程；

(2) 若圆 C 区域内有未知暗礁，现有一船 D 在 O 岛的南偏西 30° 方向距 O 岛 4 海里处，正沿着北偏东 45° 行驶，若不改变方向，试问该船有没有触礁的危险？

21.（本小题 12 分）

如图，在四棱椎 $P-ABCD$ 中，底面 ABCD 为平行四边形，$PA\perp$ 平面 ABCD，点 M，N 分别为 BC，PA 的中点，且 $AB=AC=1$，$AD=\sqrt{2}$.



(1) 若 $PA=1$，求直线 MN 与平面 PBC 所成角的正弦值；

(2) 若直线 *AC* 与平面 *PBC* 所成角的正弦值的取值范围为 $(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}]$, 求平面 *PBC* 与平面 *ABCD* 所成的锐二面角的余弦值的取值范围.

22.（本小题 12 分）

平面直角坐标系中，*O* 为坐标原点，动点 *A*、*B* 分别在 *x* 轴、*y* 轴上自由滑动，且 $|AB|=8$，线段 *AB* 的中点为 P.

(1) 求 *P* 的轨迹方程；

(2) 直线 *l*：$y=kx+b$ 与 *P* 的轨迹相交于点 *M*，*N* 两点，已知 $T\left(8,0\right)$，若 *x* 轴平分 $\angle MTN$，证明: 不论 *k* 取何值，直线 *l* 与 *x* 轴的交点为定点，并求出此定点坐标.

答案和解析

1.【答案】B

【解析】【分析】

本题考查了直线斜率与倾斜角的关系和倾斜角的范围等知识，属于基础题.

先由直线的方程求出直线的斜率，根据斜率求出直线的倾斜角.

【解答】

解：直线$x-y+1=0$，即$y=x+1$的斜率为$k=1$，

设直线的倾斜角为α，

$\therefore \tan\alpha=1$，

$\because \alpha\in[0,\pi)$,

$\therefore \alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

故选：B.

2.【答案】B

【解析】【分析】

本题考查点的坐标的求法，是基础题.

利用空间直角坐标系中，点(x,y,z)关于平面 xOz 对称的点的坐标为$(x,-y,z)$可求解.

【解答】

解：空间直角坐标系中，点(x,y,z)关于平面 xOz 对称的点的坐标为$(x,-y,z)$，

所以点$P(1,-2,-2)$关于平面 xOz 对称的点的坐标为$(1,2,-2)$.

故选：B.

3.【答案】D

【解析】【分析】

本题主要考查圆的标准方程，圆与圆的位置关系的判定方法，属于基础题.

先求出两个圆的圆心和半径，再根据它们的圆心距与半径和的关系作出判断.

【解答】

解：已知圆$C_1:(x+1)^2+(y-3)^2=4$，圆$C_2:(x-2)^2+(y+1)^2=9$，

则圆C_1的圆心为$C_1(-1,3)$，半径$r=2$，

圆C_2的圆心为$C_2(2,-1)$，半径$R=3$，

它们的圆心距等于 $\sqrt{(2+1)^2+(-1-3)^2}=5=R+r$，

故两个圆外切.

故选 D.

4.【答案】D

【解析】【分析】

本题考查空间向量基本定理，空间向量的线性运算，属于基础题.

用向量的加减法以及数乘运算表示即可.

【解答】

解：$\overrightarrow{A_1D}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{A_1C_1})$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1C_1})$

$=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{b}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{c}}$.

故选 D.

5.【答案】C

【解析】【分析】

本题考查直线斜率的求法，考查正切函数的单调性，属于中档题.

直线 $y=kx-1$ 恒过定点 $M(0,-1)$，由题意知 $k\in[k_{AM},k_{BM}]$，分别求出 k_{AM}，k_{BM}，即可得到答案.

【解答】

解：直线 $y=kx-1$ 恒过定点 $M(0,-1)$，

由题意平面内两点 $A(1,-2)$，$B(2,1)$，

定点 *M* 与 *A*、*B* 两点连线的斜率分别记为 k_{AM}，k_{BM}，

若直线 $y=kx-1$ 与线段 *AB* 有交点，

则 $k\in[k_{AM},k_{BM}]$，

由斜率计算公式可求得 $k_{AM}=\frac{-2+1}{1-0}=-1$，$k_{BM}=\frac{1+1}{2-0}=1$，

所以 $k\in[-1,1]$.

故选 C.

6.【答案】A

【解析】【分析】

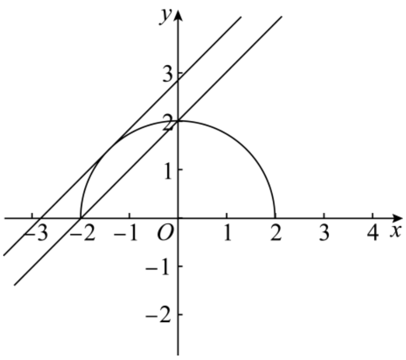
本题考查直线的斜截式方程，直线与圆的位置关系，考查数形结合思想，属于中档题.

由题意方程$x+b=\sqrt{4-x^2}$有两个实数解，转化为$y=\sqrt{4-x^2}$与$y=x+b$有两个公共点，曲线$y=\sqrt{4-x^2}$表示以$(0,0)$为圆心，半径为 2 的圆的上半部分（包括端点），结合图形，利用直线与圆的位置关系可得 b 的取值范围.

【解答】

解：方程$x+b=\sqrt{4-x^2}$有两个实数解，即函数$y=\sqrt{4-x^2}$与$y=x+b$有两个公共点，

曲线$y=\sqrt{4-x^2}$表示以$(0,0)$为圆心，半径为 2 的圆的上半部分（包括端点），如下图所示.



由图形知，当直线$y=x+b$经过点$(0,2)$时，

直线与曲线有 2 个公共点，此时有$b=2$，

当直线与圆相切时，可得$\dfrac{|b|}{\sqrt{2}}=2$，

解得$b=2\sqrt{2}$或$b=-2\sqrt{2}$（舍去），

结合图形可得实数 b 的取值范围是$[2,2\sqrt{2})$.

故选：A.

7.【答案】C

【解析】【分析】

本题主要考查直线与直线所成角的向量求法，考查空间向量基本定理，向量的数量积公式及应用，属于中档题.

先选一组基底，再利用三角形法则和平行四边形法则将两条异面直线的方向向量用基底表示，最后利用夹角公式求异面直线AB_1与BC_1所成角的余弦值即可.

【解答】

解：设$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{c}$，

三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的底面为等边三角形，且底边长和侧棱长相等，

$\angle BAC=\angle BAA_1=\angle CAA_1=60^\circ$，

设棱长为1，

则$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2},\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2},\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}$，

$\therefore\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}=(\vec{a}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a}+\vec{c})$

$=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{c}^2$

$=\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1$

$=1$，

$\because|\overrightarrow{AB_1}|=|\vec{a}+\vec{c}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{c})^2}$

$=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{c}}=\sqrt{3},$

同理$|\overrightarrow{BC_1}|=|\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}|=\sqrt{2}$，

$\therefore\cos\left\langle\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{BC_1}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}}{\left|\overrightarrow{AB_1}\right|\left|\overrightarrow{BC_1}\right|}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，

$\therefore$异面直线AB_1与BC_1所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{6}$.

故选：C.

8.【答案】*A*

【解析】【分析】

本题考查圆与圆位置关系的应用，考查与圆相关的轨迹问题，属于中档题.

由点*P*为*AB*中点可知$CP\perp AB$，继而可求得$|CP|=1$，即可求得点*P*的轨迹，再由$|PQ|=\sqrt{5}$可知点*P*在以*Q*为圆心，$\sqrt{5}$为半径的圆上，求出该圆方程，由题意可知该圆与点*P*轨迹有公共点，由此并利用圆与圆的位置关系即可求出*m*的取值范围.

【解答】

解：因为圆$C:(x-2)^2+(y-m)^2=4(m>0)$的圆心$C(2,m)$，半径为2，

*P*为*AB*的中点，则$CP\perp AB$，

因为$|AB|=2\sqrt{3}$.

所以$|CP|=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$，

所以 *P* 的轨迹方程是 $(x-2)^2+(y-m)^2=1$，

又$Q(2,-1)$，$|PQ|=\sqrt{5}$，

则点 *P* 在以 *Q* 为圆心，$\sqrt{5}$为半径的圆上，

可得该圆方程为 $(x-2)^2+(y+1)^2=5$，

则点 *P* 即在圆$(x-2)^2+(y-m)^2=1$上，也在圆$(x-2)^2+(y+1)^2=5$上，

即圆$(x-2)^2+(y-m)^2=1$与圆$(x-2)^2+(y+1)^2=5$有公共点，

易得两圆心间的距离为$|m+1|$，

则$\sqrt{5}-1\leqslant|m+1|\leqslant\sqrt{5}+1$，$(m>0)$

解得$\sqrt{5}-2\leqslant m\leqslant\sqrt{5}$，

故选A.

9.【答案】*ABD*

【解析】【分析】

本题考查利用空间向量判断线面以及面面位置关系，属于基础题.

根据直线与直线、直线与平面的位置关系逐项分析即可.

【解答】

解：由于$\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$分别为平面α，β的法向量，$\overrightarrow{n_1}//\overrightarrow{n_2}$，则垂直于同一直线的两平面平行，所以 *A* 正确.

若$\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$，则$\alpha\perp\beta$，所以 *B* 正确.

由于$\overrightarrow{v}$为直线 *l* 的方向向量，$\overrightarrow{n_1}$为平面α的法向量，且$\overrightarrow{n_1}//\overrightarrow{v}$，则$l\perp\alpha$，所以 *C* 错误.

若$\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{v}$，则$l//\alpha$或$l\subset\alpha$，所以 *D* 正确.

故选ABD.

10.【答案】*BCD*

【解析】【分析】

本题考查空间向量基本定理，空间向量共面定理，属于中档题.

根据空间向量的相关概念和空间向量基本定理、空间向量共面定理逐一判断即可.