# 立信会计学院

## 数统系

# 概率论与数理统计

8

*Jinsw*

*例 2：设连续型随机变量 $X$ 的分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ Ax^2 & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$$

求系数 $A$；$P(0.3<X<0.7)$；概率密度 $f(x)$。

解：$X$ 是连续型随机变量，因此 $F(x)$ 是连续曲线，在第二段 $(0,1)$ 区间的曲线必能和第三段 $(1,+\infty)$ 的曲线接上，必有

$$A\cdot 1^2=1\Rightarrow A=1 \qquad F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$$

$$P(0.3<X<0.7)$$

$$=F(0.7)-F(0.3)=0.7^2-0.3^2=0.4$$

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}2x & 0\le x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

*例3：设随机变量 $X$ 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$，求其分布函数。

解：$x<-1 \quad F(x)=0$

$-1\le x\le 1 \quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

$$=\int_{-\infty}^{-1} 0dt+\int_{-1}^{x}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-t^2}dt$$

$$=\frac{x}{\pi}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{\pi}\arcsin x+\frac{1}{2}$$

$x < -1 \quad F(x) = 0$

$-1 \le x \le 1 \quad F(x) = \frac{x}{\pi}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\pi}\arcsin x + \frac{1}{2}$

$x > 1 \quad F(x) = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{x}{\pi}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\pi}\arcsin x + \frac{1}{2} & -1 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

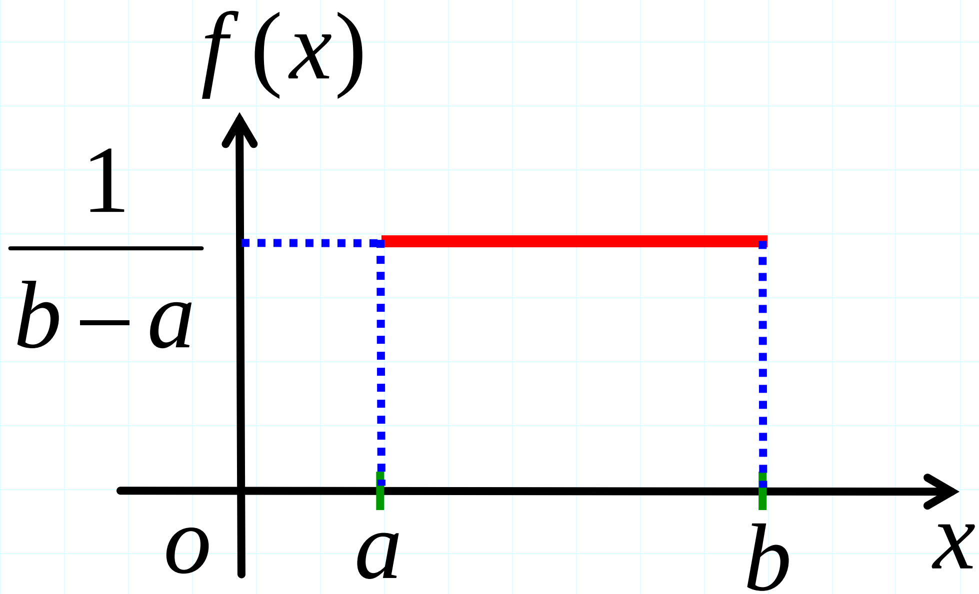
# 二．几个常用的连续型随机变量的分布

## 1．均匀分布

▲**定义：** 如果随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

其中：$a$、$b$是任意实数，则称$X$服从$[a,b]$上的均匀分布，记为$X\sim U[a,b]$。

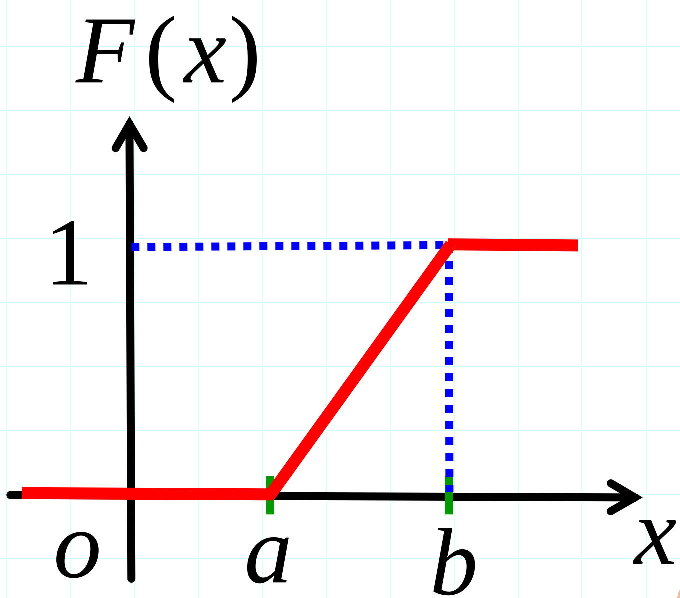


$$X \sim U[a,b] \qquad f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

*显然： $f(x)\ge 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_a^b \frac{1}{b-a}dx=1$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & x>b\end{cases}$$



*例1： $X \sim U[a,b] \quad a \le c < d \le b$

$$P\{c < X < d\} = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx = \frac{d-c}{b-a}$$

$X$ 取值于 $[a,b]$ 中任一小区间的概率与该区间的长度成正比，而与该小区间的具体位置无关

——————“均匀”

*例2：某公共汽车站从上午7时起，每15分钟来一班车，即7：00，7：15，7：30，7：45等时刻有汽车到达此站，如果乘客到达此站时间 $X$ 是7：00到7：30之间的均匀随机变量，试求他候车时间少于5分钟的概率。

**解：** 以 $7:00$ 为起点 $0$，以分为单位，依题意，

$$X \sim U(0,30) \quad f(x)=\begin{cases}1/30, 0<x<30\\ 0, other\end{cases}$$

为使候车时间 $X$ 少于 5 分钟，乘客必须在 $7:10$ 到 $7:15$ 之间，或在 $7:25$ 到 $7:30$ 之间到达，故所求的概率为

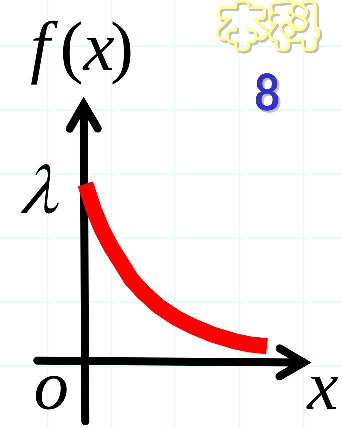
$$P\{10<X<15\}+P\{25<X<30\}$$

$$=\int_{10}^{15}\frac{1}{30}dx+\int_{25}^{30}\frac{1}{30}dx=\frac{1}{3}$$

即乘客候车时间少于5分钟的概率是 $1/3$。

2．指数分布

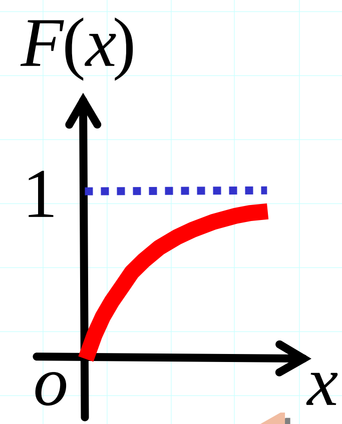
▲定义：如果随机变量X的密度函数为




$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

其中：$\lambda>0$ 是常数，则称 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的指数分布，记为 $X\sim E(\lambda)$。

＊显然：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=1$




$f(x)\geq 0$ $\quad F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

*例3．设 $X \sim E(0.002)$，求 $P\{X > 1000\}$。8

解： $F(x)=\begin{cases} 1-e^{-0.002x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
P\{X > 1000\} &= 1 - P\{X \leq 1000\} \\
&= 1 - F(1000) \\
&= 1 - (1 - e^{-0.002\times 1000}) \\
&= e^{-2} \\
&\approx 0.1353
\end{aligned}
$$

*例 4：某元件的寿命 $X$ 服从指数分布，已知其平均寿命为 1 0 0 0 小时，求 3 个这样的元件使用 1 0 0 0 小时，至少已有一个损坏的概率。

**解：** $X$ 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{1000}} & x\geq 0\\ 0 & other\end{cases}$

$$P\{X>1000\}$$
$$=1-P\{X\leq 1000\}=1-F(1000)=e^{-1}$$

各元件的寿命是否超过1000小时是独立的，用 $Y$ 表示三个元件中使用1000小时损坏的元件数，则 $Y\sim b(3,1-e^{-1})$，所求概率为 $P\{Y\geq 1\}$

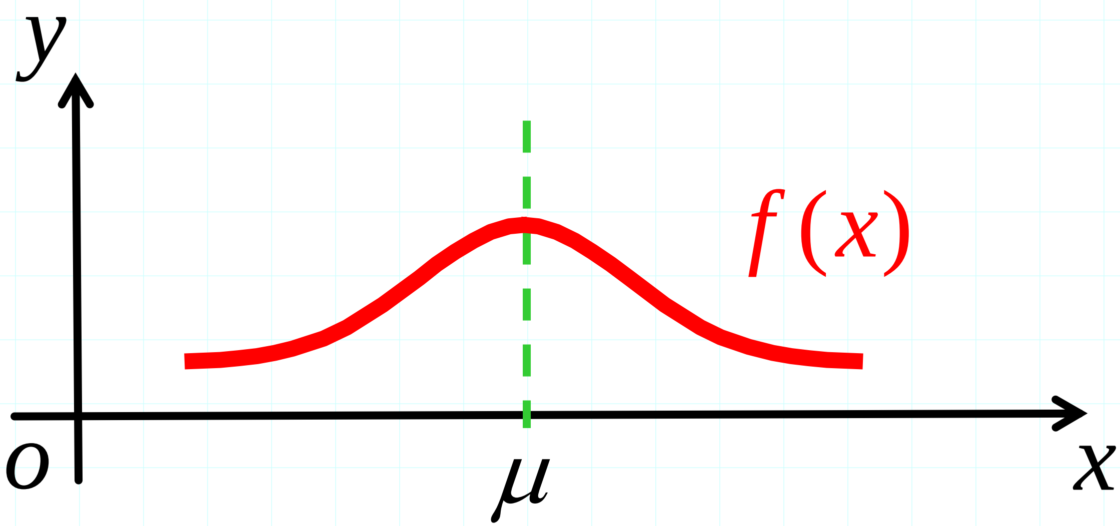
$$=1-P\{Y=0\}=1-C_3^0(1-e^{-1})^0(e^{-1})^3=1-e^{-3}$$

## 3．正态分布

▲**定义：** 如果随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

其中：$\mu$、$\sigma$ 是常数且 $\sigma>0$，则称 $X$ 服从参数为 $\mu$、$\sigma$ 的正态分布，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$。



*显然：$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\geq 0 \quad x\in R$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=1$$

$$\xlongequal{\frac{x-\mu}{\sigma}=t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2\pi}$$

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt \quad (-\infty<x<+\infty)$$

# *正态分布的密度函数的性质

1． $f(x)$ 关于直线 $x=\mu$ 对称，在 $x=\mu\pm\sigma$ 处有拐点；

2． $f(x)$ 在 $x=\mu$ 处达到最大值 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}$；

3． $y=f(x)$ 以 $x$ 轴为渐近线；

4． 当 $\sigma$ 越大时，曲线平缓，当 $\sigma$ 越小时，曲线陡峭；