山东省临沂市2023-2024学年高二上学期期末学科素养水平监测数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知直线l的一个方向向量为$(3,\sqrt{3})$，则l的倾斜角为（　）

A．0　　B．$\frac{\pi}{6}$　　C．$\frac{\pi}{4}$　　D．$\frac{\pi}{3}$

2．已知三棱锥$P-ABC$，点M，N分别为BC，PA的中点，且$\overrightarrow{PA}=\vec{a},\overrightarrow{PB}=\vec{b},\overrightarrow{PC}=\vec{c}$，用$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$表示$\overrightarrow{MN}$，则$\overrightarrow{MN}=$（　）

A．$\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$　　B．$\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})$　　C．$\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a}-\vec{b})$　　D．$\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$

3．已知$\overrightarrow{AB}=(1,2,3),\overrightarrow{CB}=(a,b,b+2)$，若点$A,B,C$共线，则$a=$（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

4．已知抛物线$C:x^2=2py(p>0)$的焦点为F，点$P(x_0,2)$在C上，$|PF|=\frac{5}{2}$，则直线PF的斜率为（　）

A．$\pm\frac{3}{2}$　　B．$\pm\frac{2}{3}$　　C．$\pm\frac{4}{3}$　　D．$\pm\frac{3}{4}$

5．中国古代数学名著《周髀算经》记载的“日月历法”曰:“阴阳之数，日月之法，十九岁为一章，四章为一部，部七十六岁，二十部为一遂,遂千百五二十岁”，即1遂为1520岁.某疗养中心恰有57人，他们的年龄(都为正整数)依次相差一岁，并且他们的年龄之和恰好为三遂，则最年轻者的年龄为（　）

A．52　　B．54　　C．58　　D．60

6．已知点$A(-2,2),B(2,2)$，直线l过点$C(0,4)$且与线段AB相交，则l与圆$(x-5)^2+$

$(y-1)^2=2$的位置关系是（　）

A．相交　　B．相离　　C．相交或相切　　D．相切或相离

7．一个小球作简谐振动，其运动方程为$y=5\sin\left(2\pi t-\frac{2\pi}{3}\right)$，其中$y$(单位: cm)是小球相对于平衡点的位移，$t$(单位: s)为运动时间，则小球的瞬时速度首次达到最大时，$t=$（　）

A．1　　B．$\frac{5}{6}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{1}{2}$

8．已知直线$l:3x-y-8=0$与双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两条渐近线分别交于点$A,B$（不重合），且$A,B$在以点$(6,0)$为圆心的圆上，则$C$的离心率为（　）

A．$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\frac{\sqrt{6}}{2}$

二、多选题

9．下列求导运算正确的是（　）

A．$[\cos(-x)]'=\sin x$　　B．$\left(\frac{x}{\ln x}\right)'=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$

C．$\left(\sqrt{x^5}\right)'=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$　　D．$\left(1-x^3\right)'=1-3x^2$

10．设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$\{b_n\}$的前n项和为T_n，满足$\frac{S_n}{n}=-n+b$，且$S_{11}=S_{16},T_n=1-q^n$ ($q\neq 0$且$q\neq 1$)，则（　）

A．$\{a_n\}$是等差数列　　B．$S_n>0$时，n的最大值为26

C．若 $q>1$，则数列 $\{b_n\}$ 是递增数列　　D．若 $q=3$，则 $\frac{T_9-T_7}{T_5-T_3}=81$

11．已知曲线 C 的方程是 $\frac{x^2}{m-2}-\frac{y^2}{4-m}=1(m\in\mathbf{R})$.则（　）

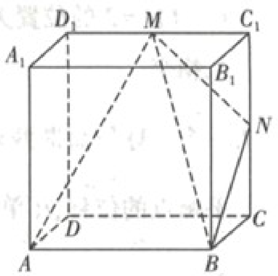
A．若 C 是双曲线，则 $m>4$ 或 $m<2$

B．若 $m>4$，则 C 表示焦点在 x 轴上的椭圆

C．若 $m=\frac{14}{3}$，则 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D．若 C 是离心率为 $\sqrt{2}$ 的双曲线，则 C 的焦点到其渐近线距离为 1

12．如图,在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M,N 分别为棱 C_1D_1,C_1C 的中点，则（　）



A．$AM//BN$　　B．点 N 到平面 ABM 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C．平面 ABM 与平面 MNB 的夹角为 45°　　D．直线 MN 与平面 ABM 所成的角为 60°

三、填空题

13．若直线 $l_1:(a+1)x-3y+1=0$ 与 $l_2:x+ay-4=0$ 互相垂直，则 $a=$______.

14．已知空间向量 $\vec{a}=(2,1,2),\vec{b}=(1,1,-1)$，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量的坐标是______.

15．已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，直线 l 与 C 交于 A,B 两点，直

线 $y=-2x$ 与 l 的交点恰好为线段 AB 的中点，则 l 的斜率为______.

16．已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1a_2a_3\cdots a_n=2^{n^2+n}$ ，若函数

$f(x)=\dfrac{x(x-a_2)(x-a_4)(x-a_6)}{(x-a_1)(x-a_3)(x-a_5)}$, $f(x)$ 的导数为 $f'(x)$ ，则 $f'(0)=$______.

四、解答题

17．已知函数 $f(x)=ax\ln x$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $x-y-1=0$.

(1)求 a 的值;

(2)若过点 $A(0,-\mathrm{e})$ 的直线 l 与曲线 $y=f(x)$ 相切，求 l 的方程.

18．已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，且 $2a_1+a_2=4, 4a_5^2=a_4a_8$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)设 $b_n=na_n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

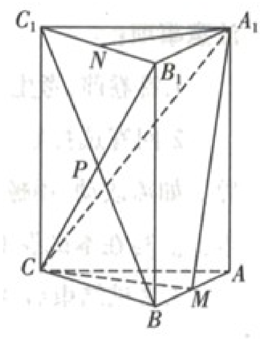
19．已知以点 $Q(-1,1)$ 为圆心的圆与圆 $C:(x-2)^2+(y+3)^2=1$ 相外切.

(1)求圆 Q 的方程;

(2)若直线 $l: y=mx-2$ 与圆 Q 相交于 M,N ，求 $|MN|$ 的最小值及此时 l 的方程.

20．如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $\angle BAC=90^{\circ}, AB=AC=2, AA_1=4, M$ 是 AB 的

中点， N 是 B_1C_1 的中点， P 是 BC_1 与 B_1C 的交点.



(1)在线段A_1N上找一点Q，使得$PQ//$平面A_1CM；

(2)在（1）的条件下，求PQ与平面A_1CM的距离.

21．已知$\{a_n\}$为等差数列，$b_n=\begin{cases}2a_n, n\text{为奇数}\\ a_n-9, n\text{为偶数}\end{cases}$，记$S_n, T_n$分别为数列$\{a_n\},\{b_n\}$的前$n$项和，$S_4=28, T_3=16$．

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)求T_n.

22．欧几里德生活的时期，人们就发现椭圆有如下的光学性质:从椭圆的一个焦点射出的光线，经椭圆内壁反射后必经过该椭圆的另一焦点.现有椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，长轴长为$2\sqrt{6}$，从$C$的左焦点$F$发出的一条光线，经$C$内壁上一点$P$反射后恰好与$x$轴垂直，且$|PF|=\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

(1)求C的方程;

(2)设点$A(2,1)$，若斜率不为0的直线l与C交于点$M,N(M,N$均异于点$A)$，且A在以MN为直径的圆上，求A到l距离的最大值.

参考答案：

1．B

【分析】由直线的方向向量求得直线的斜率，由斜率即可求得倾斜角.

【详解】由题意，$k=\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan\alpha$，且$\alpha\in(0,\pi)$，

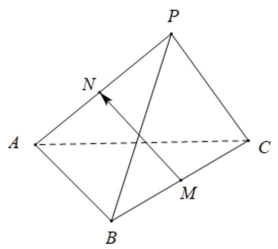
所以$\alpha=\frac{\pi}{6}$.

故选：B

2．D

【分析】根据几何体，结合向量的线性运算公式，即可求解.

【详解】$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}\right)$



故选：D

3．B

【分析】根据三点共线转化为向量共线，即$\overrightarrow{CB}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

【详解】由题意可知，$\overrightarrow{CB}=\lambda\overrightarrow{AB}$，

即$\begin{cases}a=\lambda\\ b=2\lambda\\ b+2=3\lambda\end{cases}$，解得：$\lambda=2,a=2,b=4$.

故选：B

4．D

【分析】根据焦半径公式得到$p=1$，从而得到$x_0=\pm2$，分两种情况，求出答案.

【详解】由焦半径公式可得$2+\frac{p}{2}=\frac{5}{2}$，解得$p=1$，

故抛物线$C:x^2=2y$，

故$x_0=\pm 2$，

当$x_0=2$时，$P(2,2),F\left(0,\frac{1}{2}\right)$，

直线PF的斜率为$\frac{2-\frac{1}{2}}{2-0}=\frac{3}{4}$，

当$x_0=-2$时，$P(-2,2),F\left(0,\frac{1}{2}\right)$，

直线PF的斜率为$\frac{2-\frac{1}{2}}{-2-0}=-\frac{3}{4}$，

综上，直线PF的斜率为$\pm\frac{3}{4}$.

故选：D

5．A

【分析】由等差数列性质以及求和公式即可得解.

【详解】将他们的年龄从小到大依次排列为$a_1,a_2,\cdots,a_{57}$，

所以$\frac{57\left(a_1+a_{57}\right)}{2}=1520\times 3$，$a_{57}=a_1+56$，解得$a_1=52$.

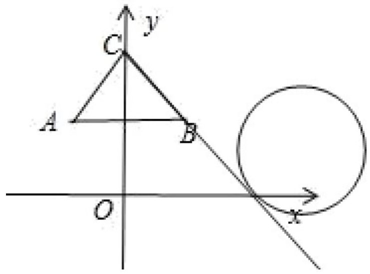
故选：A.

6．D

【分析】求得直线AC，BC的斜率，进而可求直线BC的方程，依据直线BC与圆的位置

关系可得结论.

【详解】直线AC的斜率为$k_{AC}=\frac{4-2}{0+2}=1$，$k_{BC}=\frac{4-2}{0-2}=-1$，



$\because$直线l经过点$C(0,4)$且与线段AB相交，

$\therefore$直线l的斜率的范围为$(-\infty,-1]\bigcup[1,+\infty)$，

直线BC的方程为$y-4=-1(x-0)$，即$x+y-4=0$，

由圆$(x-5)^2+(y-1)^2=2$，可得圆心$D(5,1)$，$r=\sqrt{2}$，可知圆心$D(5,1)$在直线BC的右侧，

且圆心D的直线BC的方程的距离为$d=\frac{|5+1-4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

直线BC的方程为$y-4=-1(x-0)$，即$x+y-4=0$，

由圆$(x-5)^2+(y-1)^2=2$，可得圆心$D(5,1)$，$r=\sqrt{2}$，

圆心D的直线BC的方程的距离为$d=\frac{|5+1-4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

故直线l与圆相切或相离.

故选：D.

7．C

【分析】利用导数即可求解.

【详解】$y'=10\pi\cos\left(2\pi t-\frac{2\pi}{3}\right)$，

故当$\cos\left(2\pi t-\frac{2\pi}{3}\right)=1$ 时，此时瞬时速度最大，$2\pi t-\frac{2\pi}{3}=2k\pi$，$k\in Z$，

所以$t=\frac{1}{3}$时，此时瞬时速度首次达到最大，

故选：C

8．B

【分析】首先求点A,B的坐标，以及中点坐标，结合圆的几何性质，列式求解.

【详解】联立$\begin{cases}y=\frac{b}{a}x\\3x-y-8=0\end{cases}$，得$\begin{cases}x=\frac{8a}{3a-b}\\y=\frac{8b}{3a-b}\end{cases}$；

联立$\begin{cases}y=-\frac{b}{a}x\\3x-y-8=0\end{cases}$，得$\begin{cases}x=\frac{8a}{3a+b}\\y=\frac{-8b}{3a+b}\end{cases}$；

不妨设$A\left(\frac{8a}{3a-b},\frac{8b}{3a-b}\right)$，$B\left(\frac{8a}{3a+b},\frac{-8b}{3a+b}\right)$，

则线段AB的中点为$\left(\frac{24a^2}{9a^2-b^2},\frac{8b^2}{9a^2-b^2}\right)$，

由题意可知，$\frac{\frac{8b^2}{9a^2-b^2}}{\frac{24a^2}{9a^2-b^2}-6}=-\frac{1}{3}$，整理为$a=b$，

所以双曲线为等轴双曲线，离心率$e=\sqrt{2}$.

故选：B

9．BC

【分析】根据函数的导数公式，结合导数的运算法则和复合函数求导法则，分别进行判断即可.

【详解】$\left[\cos\left(-x\right)\right]'=\left(\cos x\right)'=-\sin x$，所以A错误；

$\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)'=\dfrac{\ln x-x\cdot\dfrac{1}{x}}{\left(\ln x\right)^2}=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，所以B正确；

$\left(\sqrt{x^5}\right)'=\left(x^{\frac{5}{2}}\right)'=\dfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$，所以C正确；

$\left(1-x^3\right)'=-3x^2$，所以D错误.

故选：BC

10．ABD

【分析】对于A，首先得$S_n=-n^2+27n$，根据S_n,a_n之间的关系得$a_n=-2n+28,n\in\mathrm{N}^*$，由此即可判断；对于B，令$S_n=-n^2+27n>0$，解不等式即可判断；对于C，由$b_2-b_1=T_2-2T_1$举出反例即可判断；对于D，代入即可验算.

【详解】对于A，由题意$S_n=-n^2+bn,S_{11}=-121+11b=-256+16b=S_{16}$，解得$b=27$，

所以$S_n=-n^2+27n$，$a_1=S_1=26$，

当$n\geq 2,n\in\mathrm{N}^*$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(-n^2+27n\right)+\left(n-1\right)^2-27\left(n-1\right)=-2n+28$，

当$n=1$时，有$a_1=-2+28=26$，故$a_n=-2n+28,n\in\mathrm{N}^*$，故A正确；

对于B， 令$S_n=-n^2+27n>0$，解得$n<27,n\in\mathrm{N}^*$，故B正确；

对于C，若$q>1$，则$b_2-b_1=T_2-2T_1=1-q^2-2\left(1-q\right)=-\left(1-q\right)^2<0$，故C错误；

对于D，若 $q=3$ ，则 $\frac{T_9-T_7}{T_5-T_3}=\frac{\left(1-3^9\right)-\left(1-3^7\right)}{\left(1-3^5\right)-\left(1-3^3\right)}=\frac{3^7\left(1-3^2\right)}{3^3\left(1-3^2\right)}=3^4=81$，故D正确.

故选：ABD.

11．BCD

【分析】A选项，根据 C 是双曲线得到不等式，求出 $2<m<4$；B选项，$m-2>m-4>0$，

故 C 表示焦点在 x 轴上的椭圆；C选项，求出 $\frac{x^2}{\frac{8}{3}}+\frac{y^2}{\frac{2}{3}}=1$，求出离心率；D选项，根据离心率得到方程，求出 $m=3$，得到焦点坐标和渐近线方程，得到答案.

【详解】A选项，若 C 是双曲线，则 $(m-2)(4-m)>0$，解得 $2<m<4$，A错误；

B选项，若 $m>4$， $\frac{x^2}{m-2}+\frac{y^2}{m-4}=1$，

则 $m-2>m-4>0$，所以 C 表示焦点在 x 轴上的椭圆，B正确；

C选项，若 $m=\frac{14}{3}$，则 $\frac{x^2}{\frac{8}{3}}+\frac{y^2}{\frac{2}{3}}=1$，则 $c^2=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}=2$，

C 的离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{8}{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，C正确；

D选项，若 C 是离心率为 $\sqrt{2}$ 的双曲线， $\frac{x^2}{m-2}-\frac{y^2}{4-m}=1$，

故 $\frac{\sqrt{m-2+4-m}}{\sqrt{m-2}}=\sqrt{2}$，解得 $m=3$，

C 的焦点坐标为$\left(\pm\sqrt{2},0\right)$，渐近线方程为$y=\pm x$，

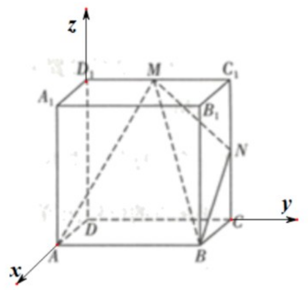
焦点到其渐近线距离为$\dfrac{\left|\sqrt{2}\right|}{\sqrt{1+1}}=1$，D 正确.

故选：BCD

12．BC

【分析】建立空间直角坐标系，利用坐标法逐项分析即得.

【详解】如图建立空间直角坐标系，设正方体的棱长为2，



则$A\left(2,0,0\right),B\left(2,2,0\right),D\left(0,0,0\right),C_1\left(0,2,2\right),C\left(0,2,0\right)$,

$D_1\left(0,0,2\right),M\left(0,1,2\right),N\left(0,2,1\right)$，

$\overrightarrow{AB}=\left(0,2,0\right)$，$\overrightarrow{MN}=\left(0,1,-1\right)$

由$\overrightarrow{AM}=\left(-2,1,2\right),\overrightarrow{BN}=\left(-2,0,1\right)$，可知$\overrightarrow{AM}$与$\overrightarrow{BN}$不平行，故A错误；

设平面ABM的法向量为$\vec{n}=\left(x,y,z\right)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=-2x+y+2z=0\\ \overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=2y=0\end{cases}$，令$x=1$，则$y=0,z=1$，

所以$\vec{n}=\left(1,0,1\right)$，