重庆市巴蜀中学2024届高考适应性月考卷（五）数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知复数$z=\frac{\mathrm{i}-\mathrm{i}^4}{(1-\mathrm{i})^2}$，则$|z|=$（　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\frac{3}{2}$

2．已知集合$A=\{x|\log_2^2x-3\log_2x<0\}$，$B=\{y|y=3x-1,x\in N\}$，则$A\cap B=$（　）

A．$\{2,5,8\}$　　B．$\{-1,2,5\}$

C．$\{5,8\}$　　D．$\{2,5\}$

3．古希腊数学家欧几里得在《几何原本》里提出：“球的体积（V）与它的直径（D）的立方成正比”， 即$V=kD^3$，但欧几里得未给出常数k的值. 现算出 k 的值，进而可得$\cos k=$（　）

A．0　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 定义域为$\mathbf{R}$的函数$f(x)$关于$x=1$对称，且当$x_2>x_1>1$时，$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$恒成立，设 $a=f\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$，$b=f\left(\frac{2}{3}\right)$，$c=f(2)$，则（　）

A．$c>a>b$　　B．$c>b>a$　　C．$a>c>b$　　D．$b>c>a$

5．已知直线l_1过点$A(0,1)$，直线l_1与直线$l_2:y=x$的交点B在第一象限， 点O为坐标原点. 若三角形OAB为钝角三角形时，则直线l_1的斜率的范围是（　）

A．$(-\infty,-1]$　　B．$(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

C．$(-\infty,-1)\cup(0,1)$　　D．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

6．在三棱锥$P-ABC$中，$PA=\sqrt{5}$，$PA\perp$平面ABC， D为BC 的中点且 $PD=2\sqrt{2}$，当$\triangle ABC$为正三角形时，三棱锥$P-ABC$外接球的表面积为（　）

A．10π　　B．$\frac{31\pi}{3}$　　C．4π　　D．$\frac{31\pi}{12}$

7．若关于 x 的方程 $2\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos 2x=1$在$[0,\pi)$内有两个不同的解$x_1$，$x_2$， 则$\sin(x_1+x_2)$的值为（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

8. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=2a_n-2^{n+1}$, 不等式 $(m^2-10m)a_n\le(n-19)S_n$对任意$n\in\mathbf{N}*$恒成立， 则实数m的最大值为（　）

A．4　　B．6　　C．8　　D．2

二、多选题

9．小明参加唱歌比赛， 现场 8 位评委给分分别为: 15， 16， 18， 20， 20， 22， 24， 25.按比赛规则，计算选手最后得分成绩时，要先去掉评委给分中的最高分和最低分. 现去掉这组得分中的最高分和最低分后，下列数字特征的值不会发生变化的是（　）

A．平均数　　B．极差　　C．中位数　　D．众数

10．设抛物线 C: $y^2=2px$的焦点为F， 准线为$x=-1$. 点 A，B 是抛物线 C 上不同的两点，且$|AF|+|BF|=8$，则（　）

A．$p=2$　　B．以线段AB为直径的圆必与准线相切

C．线段AB的长为定值　　D．线段AB的中点 E 到准线的距离为定值

11．已知向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足$|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=1,|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{31},|\vec{c}|=2|\vec{c}-\vec{a}|$，设$\vec{m}=t\vec{b}$ $(t\in R)$，则（）

A．$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$　　B．$\vec{a}+\vec{b}$在$\vec{b}$方向上的投影向量为$\frac{5}{2}\vec{b}$

C．$|\vec{m}-\vec{c}|$的最小值为$2\sqrt{3}-2$　　D．$|\vec{m}-\vec{c}|$无最大值

12．已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为2，O是空间中的一动点，下列结论正确的是（　）

A．若点O在正方形DCC_1D_1内部，异面直线A_1B_1与 OB 所成角为 θ，则 θ 的取值范围为 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

B．若点O在正方形DCC_1D_1内部，且$|OB|=\sqrt{5}$，则点O的轨迹长度为$\frac{1}{4}\pi$

C．若$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}(0\leq\lambda\leq1)$，则$B_1O+OD$的最小值为$\sqrt{13}$

D．若$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)\overrightarrow{AD}(0\leq\lambda\leq1)$，平面 OAD_1截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$所得截面面积的最大值为$3\sqrt{3}$

三、填空题

13．已知两个等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为S_n，T_n ．若 $\frac{a_5}{b_5}=2$，则$\frac{S_9}{T_9}=$ ＿＿＿＿＿＿.

14．在三棱台$ABC-A_1B_1C_1$中，已知$AC=BC=2,A_1C_1=B_1C_1=1,AC\perp BC,CC_1\perp$平面$ABC$， $\angle A_1AC=60°$， 则该三棱台的体积为＿＿＿.

15．已知动点$M(x,y)$满足$\begin{cases}x=2+2\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$ $(\theta\in\mathbf{R})$，若直线 l 过点$(-2,0)$与点 M 的轨迹相切，则直线 l 的方程为______.

16．若不等式$\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(2m\ln x-x+1)\le x^{m}$（$m>0$）对任意的$x\in(0,+\infty)$恒成立，则实数 m 的最大值为______.

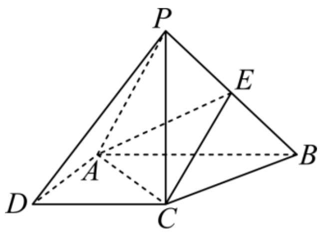
四、解答题

17．已知$\triangle ABC$的内角 A，B，C 所对应的边分别为 a，b，c，且满足 $\frac{a}{b+c}+\frac{b\sin B}{b\sin A+c\sin B}=1$.

(1)求角 C 的大小；

(2)若$a=2,b=4$，点 D 为 AB 的中点，求$\tan\angle ACD$的值.

18.如图，在四棱锥$P-ABCD$中，四边形$ABCD$是直角梯形，$PC\perp$平面$ABCD$，$AD\perp AB$，$AB/\!/DC$，$AB=2AD=2CD$，点 E 是 PB 的中点.



(1)证明: 平面$PAC\perp$平面 PBC;

(2)若平面 PAD 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角的正切值为2，求直线 PD 与平面 ACE 所成角的正弦值.

19．已知递增等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$2a_1,\frac{3}{2}a_2,a_3$成等差数列.

(1)求数列$\{\log_2a_n\}$的前 n 项和S_n；

(2)若$b_n=a_n\cdot\log_2a_n$设数列$\{b_n\}$的前 n 项和为T_n，求使得$T_n\ge2024$的最小正整数 n 的值.

20．已知函数 $f(x)=\ln x+1$，$g(x)=ax^2(a>0)$.

(1)当$a=2$时， 求$y=f(x)-g(x)$的极值；

(2)若曲线$y=f(x)$与曲线$y=g(x)$存在 2 条公切线， 求 a 的取值范围.

21.重庆南山风景秀丽，可以俯瞰渝中半岛，是徒步休闲的好去处. 上南山的步道很多，目前有标识的步道共有 18 条. 某徒步爱好者俱乐部发起一项活动，若挑战者连续 12 天每天完成一次徒步上南山(每天多次上山按一次计算) 运动，即可获得活动大礼包. 已知挑战者甲从 11 月 1 号起连续 12 天都徒步上南山一次，每次只在凉水井步道和清水溪步道中选一条上山. 甲第一次选凉水井步道上山的概率为 $\frac{3}{4}$，而前一次选择了凉水井步

道，后一次继续选择凉水井步道的概率为 $\frac{1}{4}$，前一次选择清水溪步道，后一次继续选择清水溪步道的概率为 $\frac{1}{2}$，如此往复. 设甲第 n(n=1，2，…， 12)天走凉水井步道上山的概率为P_n .

(1)求 P_2和P_n；

(2)求甲在这 12 天中选择走凉水井步道上山的概率小于选择清水溪步道上山概率的天数.

22．已知点$P(x_0,y_0)$是椭圆 E: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上的动点，离心率$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，设椭圆左、右焦点分别为$F_1,F_2$，且$|PF_1|+|PF_2|=4$

(1)求椭圆 E 的标准方程；

(2)若直线PF_1,PF_2与椭圆 C 的另一个交点分别为 A，B，问△ PAB面积是否存在最大值，若存在，求出最大值； 若不存在，请说明理由.

参考答案：

1．A

【分析】利用复数的四则运算与模的公式即可得解.

【详解】因为$z=\frac{\mathrm{i}-\mathrm{i}^4}{(1-\mathrm{i})^2}=\frac{\mathrm{i}-1}{-2\mathrm{i}}=\frac{1-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}$，所以$|z|=\frac{|1-\mathrm{i}|}{|2\mathrm{i}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：A.

2．D

【分析】根据一元二次不等式结合对数求集合 A，进而结合交集的意义分析求解.

【详解】因为$A=\{x|\log_2^2x-3\log_2x<0\}=\{x|0<\log_2x<3\}=\{x|1<x<8\}$，

令$0<3x-1<8$，且$x\in N$，解得$x=1,2$，此时$y=3x-1=2,5$

所以$A\cap B=\{2,5\}$.

故选：D

3．D

【分析】根据球的体积公式分析求解.

【详解】因为$V=kD^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3$，整理得$k=\frac{\pi}{6}$，

所以$\cos k=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：D.

4．B

【分析】由题设可知函数单调性，结合对称性即可比较大小.

【详解】因为函数$f(x)$关于$x=1$对称，

所以$c=f(2)=f(0)$，

又因为当$x_2>x_1>1$时，$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$恒成立，

所以$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，故$f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减，

因为$0<\frac{2}{3}<\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$，所以$f(0)>f\left(\frac{2}{3}\right)>f\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$，

所以$c>b>a$.

故选：B

5．C

【分析】找到三个极端位置的斜率值，并旋转相关直线得到斜率范围.

【详解】当三角形OAB为直角三角形时，$OB\perp BA$或$OA\perp BA$，

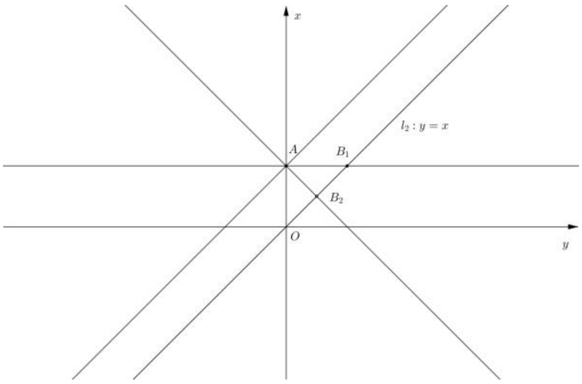
此时l_1的斜率$k=-1$或 0.

当l_1从$k=-1$顺时针旋转到y轴之间时，三角形OAB为钝角三角形，此时$k<-1$;

当l_1从$k=0$逆时针旋转到与直线$l_2: y=x$平行之间时，三角形OAB为钝角三角形，此时$0<k<1$，

综上，$k\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$，

故选：C.



故选：C.

6．B

【分析】根据球心与正三角形中心连线垂直于平面ABC，结合线面垂直性质确定球心位置，然后利用已知求出半径即可得表面积.

【详解】记球心为O，正$\triangle ABC$的中心为O'，PA的中点为E，

由正$\triangle ABC$和球的性质可知，$AO'=\frac{2}{3}AD, OO'\perp$平面$ABC$，

因为$PA\perp$平面ABC，$AD\subset$平面ABC，所以$OO'//PA$，$PA\perp AD$，

因为$OP=OA$，所以$OE\perp PA$，

所以，在平面$AO'OE$中，$OE//AO'$，所以$AO'OE$为矩形，

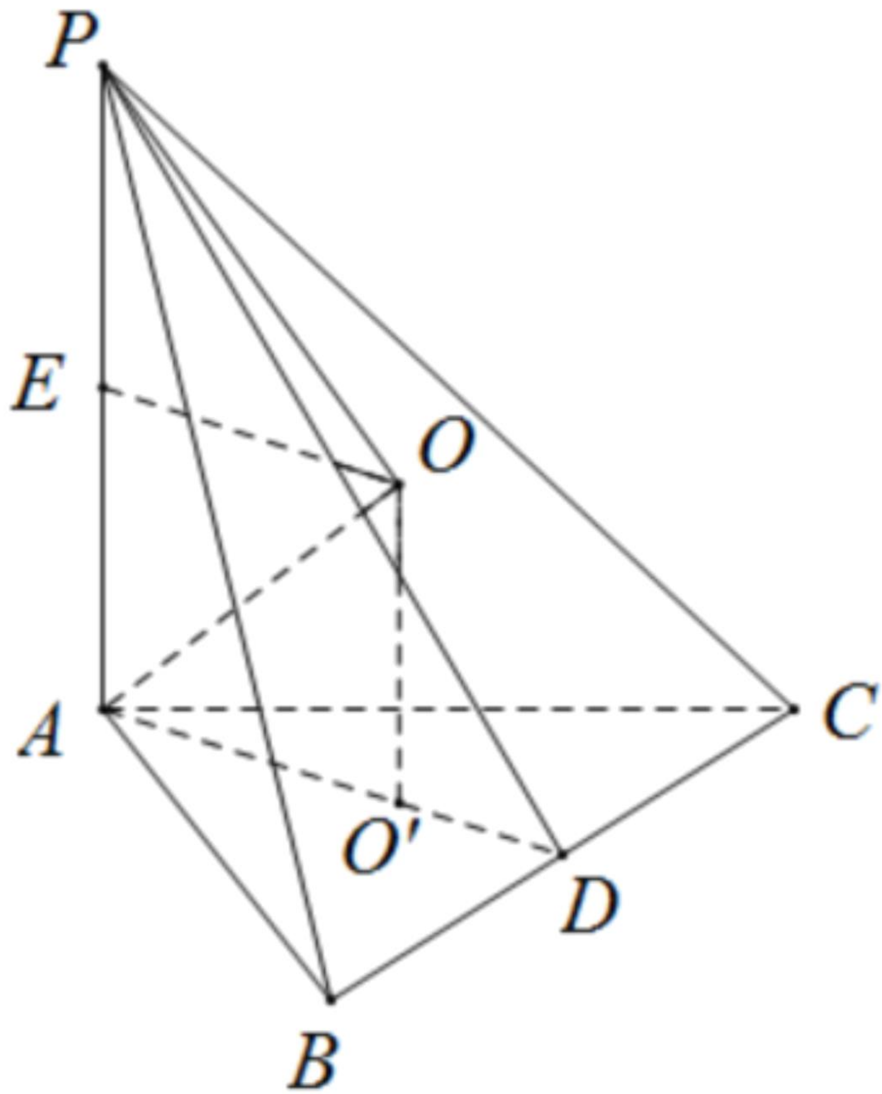
所以$OO'=AE=\frac{\sqrt{5}}{2}$,

又$AD=\sqrt{PD^2-PA^2}=\sqrt{3}$，所以$AO'=\frac{2}{3}AD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

所以$AO^2=AO'^2+OO'^2=\frac{31}{12}$,

所以三棱锥$P-ABC$外接球的表面积为$4\pi R^2=4\pi\times\frac{31}{12}=\frac{31\pi}{3}$.

故选：B



7．A

【分析】利用辅助角公式得$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$，再结合正弦函数的图象与性质求出$x_1+x_2=\frac{5\pi}{6}$，代入计算即可.

【详解】关于x的方程$\sin2x-\sqrt{3}\cos2x=1$，则$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$，

当$x\in[0,\pi),2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$，所以$2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$，则$x=\frac{\pi}{4}$或$\frac{7\pi}{12}$.

设$x_1<x_2$，所以$x_1+x_2=\frac{5\pi}{6}$，则$\sin(x_1+x_2)=\frac{1}{2}$，

故选：A.

8．B

【分析】利用S_n, a_n的递推公式，利用构造法求通项公式，然后将不等式恒成立问题转化为求$\frac{2(n-19)n}{n+1}$的最小值问题，然后分离常数，利用对勾函数性质求解即可.

【详解】因为$S_n = 2a_n - 2^{n+1}$，

所以$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = 2a_{n+1} - 2^{n+2} - (2a_n - 2^{n+1})$，整理得$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = 1$，

又$S_1 = 2a_1 - 2^2$得$a_1 = 4$，$\frac{a_1}{2} = 2$，

所以$\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$是以 2 为首项，1 为公差的等差数列，

所以$\frac{a_n}{2^n} = n + 1$，故$a_n = (n+1)2^n$，$S_n = 2a_n - 2^{n+1} = n \cdot 2^{n+1}$，

所以$(m^2 - 10m)a_n \le (n-19)S_n \Leftrightarrow (m^2 - 10m)(n+1) \cdot 2^n \le (n-19)n \cdot 2^{n+1}$，

即$m^2 - 10m \le \frac{2(n-19)n}{n+1}$，

因为$\frac{2(n-19)n}{n+1} = \frac{2[(n+1)^2 - 21(n+1) + 20]}{n+1} = 2\left(n + 1 + \frac{20}{n+1} - 21\right)$，

令$t = n + 1$，由对勾函数性质可知，$y = t + \frac{20}{t}$在$\left(0, 2\sqrt{5}\right)$上单调递减，

在$\left(2\sqrt{5}, +\infty\right)$上单调递增，

又$t \in \mathbf{N}*$，所以$t = 4$或$t = 5$时，$y_{\min} = t + \frac{20}{t} = 9$，所以$2\left(n + 1 + \frac{20}{n+1} - 21\right)_{\min} = -24$

所以，$m^2 - 10m \le -24$，解得$4 \le m \le 6$.

所以实数 m 的最大值为 6.

故选：B

9．ACD

【分析】根据给定的条件，利用平均数、极差、中位数、众数的意义逐一判断即可.

【详解】对于 A，去掉最高分和最低分之前，8 个数据的平均分为$\frac{15+16+18+20+20+22+24+25}{8} = 20$，

去掉最高分和最低分之后， 6 个数据的平均分为$\frac{16+18+20+20+22+24}{6} = 20$，A 正确；

对于 B，去掉最高分和最低分之前，8 个数据的极差为 10，去掉最高分和最低分之后，6 个数据的极差为 8，B 错误；

对于 C，去掉最高分和最低分之前，8 个数据的中位数为 20，去掉最高分和最低分之后，6 个数据的中位数为 20，C 正确；

对于 D，去掉最高分和最低分之前，8 个数据的众数为 20，去掉最高分和最低分之后，6 个

数据的众数为 20，D 正确.

故选：ACD

10．AD

【分析】根据给定条件，求出抛物线C的方程，令$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由已知结合抛物线的定义可得$x_1+x_2=6$，计算判断 AD；举例说明判断 BC.

【详解】依题意，抛物线C的焦点$F(1,0)$，方程为$y^2=4x$，则$p=2$，A 正确；

令$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，显然$|AF|+|BF|=x_1+1+x_2+1=6$，即$x_1+x_2=6$，

取$x_1=0$，则$x_2=6$，即点$A(0,0),B(6,\pm2\sqrt{6})$，此时$|AB|=2\sqrt{15}$，

以线段AB为直径的圆的圆心为$(3,\pm\sqrt{6})$，该圆心到准线$x=-1$的距离为 4，不等于圆半径$\sqrt{15}$，

因此该圆与准线不相切，B 错误；

以点$A(0,0),B(6,\pm2\sqrt{6})$为端点的线段长$|AB|=2\sqrt{15}$，当直线AB垂直于 x 轴时，$x_1=x_2=3$，此时$|AB|=4\sqrt{3}$，C 错误；

线段AB的中点 E 的横坐标为 3，点 E 到准线的距离为$3-(-1)=4$，D 正确.

故选：AD

11．BCD

【分析】对于 AB，利用向量的数量积运算即可得解；对于 CD，利用向量的几何意义建立直角坐标系，将问题转化为圆上点到直线的距离的问题，从而得解.

【详解】对于 A，因为$|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=1$，$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{31}$，

所以$(2\vec{a}-\vec{b})^2=31$，即$4\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=31$，

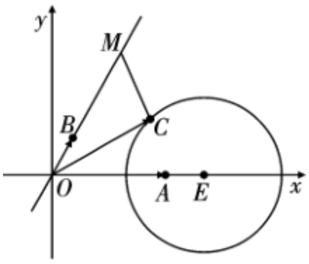
即$4\times9-4\vec{a}\cdot\vec{b}+1=31$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{2}$，故 A 错误；

又$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{2}$，$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\in[0,\pi]$，所以$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$，

对于 B，因为$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=\frac{5}{2}$，

所以$\vec{a}+\vec{b}$在$\vec{b}$方向上的投影向量为$\frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{5}{2}\vec{b}$，故 B 正确；

对于 CD，建立直角坐标系xOy，如图，



设$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=(3,0),\vec{b}=\overrightarrow{OB}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\vec{c}=\overrightarrow{OC}=(x,y)$，

因为$|\vec{c}|=2|\vec{c}-\vec{a}|$，所以$\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{(x-3)^2+y^2}$，整理得$(x-4)^2+y^2=4$，

即C点的轨迹是：圆心为$E(4,0)$，半径为 2 的圆，

则$\vec{m}=\overrightarrow{OM}=t\overrightarrow{OB}$，则点$M$在直线$OB$上运动，则$|\vec{m}-\vec{c}|=|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{CM}|$，

设点E到直线OB的距离为d，

则$|\overrightarrow{CM}|_{\min}=d-r=|\overrightarrow{OE}|\cdot\sin\frac{\pi}{3}-2=2\sqrt{3}-2$，无最大值，故 CD 正确.

故选：BCD.

12．AC

【分析】选项 A，建立空间直角坐标系，利用向量夹角求解线线角及范围；选项 B，利用垂直关系，将$|OB|=\sqrt{5}$转化为$|OC|=1$，进而得到O点轨迹；选项 C，由向量关系得动点O的位置，利用展开图将空间折线段之和最小值转化为平面内两点之间距离最短求解即可；选项 D，由向量关系得O,B,D三点共线，当点O与B重合时，利用特殊位置求解截面面积大于$3\sqrt{3}$，故排除.

【详解】选项 A，以D为坐标原点，分别以DA,DC,DD_1所在直线为x,y,z轴，建立空间直角坐标系$D-xyz$，

则$A_1(2,0,2),B_1(2,2,2),B(2,2,0),O(0,y,z),0<y<2,0<z<2$，

则$\overrightarrow{A_1B_1}=(0,2,0),\overrightarrow{BO}=(-2,y-2,z)$，

则$\cos\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{BO}\rangle\right|=\frac{|\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\overrightarrow{BO}|}{|\overrightarrow{A_1B_1}||\overrightarrow{BO}|}=\frac{|2(y-2)|}{2\sqrt{4+(y-2)^2+z^2}}=\frac{|y-2|}{\sqrt{4+(y-2)^2+z^2}}$

$=\frac{1}{\sqrt{\frac{4+z^2}{(y-2)^2}+1}}$，因为$4+z^2>4,0<(y-2)^2<4$，

所以$\frac{4+z^2}{(y-2)^2}>1$，$\sqrt{\frac{4+z^2}{(y-2)^2}+1}>\sqrt{2}$，

故$\cos\theta\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，则 θ 的取值范围为$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，故 A 正确；