浙江省宁波市2023-2024学年高三上学期高考模拟考试数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知$z_1=a-\mathrm{i},z_2=1+b\mathrm{i}$（$a,b\in\mathrm{R}$，$\mathrm{i}$为虚数单位），若$z_1\cdot z_2$是实数，则（　）

A．$ab-1=0$　　B．$ab+1=0$

C．$a-b=0$　　D．$a+b=0$

2．设集合$U=\mathrm{R}$，集合$M=\{x|x^2-2x\geq 0\},N=\{x|y=\log_2(1-x)\}$，则$\{x|x<2\}=$（　）

A．$M\cup N$　　B．$N\cup(\complement_{\mathrm{U}}M)$

C．$M\cup(\complement_{\mathrm{U}}N)$　　D．$\complement_{\mathrm{U}}(M\cap N)$

3．若$\vec{a},\vec{b}$是夹角为60°的两个单位向量，$\lambda\vec{a}+\vec{b}$与$-3\vec{a}+2\vec{b}$垂直，则$\lambda=$（　）

A．$\frac{1}{8}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{7}{8}$　　D．$\frac{7}{4}$

4．已知数列$\{a_n\}$为等比数列，且$a_5=5$，则（　）

A．a_1+a_9的最小值为50　　B．a_1+a_9的最大值为50

C．a_1+a_9的最小值为10　　D．a_1+a_9的最大值为10

5．已知函数$f(x)=2^x+\log_2x,g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-\log_2x,h(x)=x^3+\log_2x$的零点分别为$a,b,c$，则（　）

A．$a>b>c$　　B．$b>a>c$

C．$c>a>b$　　D．$b>c>a$

6．设O为坐标原点，F_1,F_2为椭圆$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$的焦点，点$P$在$C$上，$|OP|=\sqrt{3}$，则$\cos\angle F_1PF_2=$（　）

A．$-\frac{1}{3}$　　B．0　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

7．已知二面角$P-AB-C$的大小为$\frac{3\pi}{4}$，球O与直线AB相切，且平面PAB、平面ABC截球O的两个截面圆的半径分别为1、$\sqrt{2}$，则球O半径的最大可能值为（　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．3　　D．$\sqrt{10}$

8．已知函数$f(x)=x^2+ax+b$，若不等式$|f(x)|\leq 2$在$x\in[1,5]$上恒成立，则满足要求的有序数对(a,b)有（　）

A．0个　　B．1个　　C．2个　　D．无数个

二、多选题

9．已知$(1-2x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_5x^5$，则下列说法正确的是（　　）

A．$a_0=1$　　B．$a_3=-80$

C．$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-1$　　D．$a_0+a_2+a_4=121$

10．设O为坐标原点，直线$x+my-m-2=0$过圆$M: x^2+y^2-8x+6y=0$的圆心且交圆于P,Q两点，则（　　）

A．$|PQ|=5$　　B．$m=\frac{1}{2}$

C．$\triangle OPQ$的面积为$5\sqrt{5}$　　D．$OM\perp PQ$

11．函数$f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$在区间$\left[-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}\right]$上为单调函数，且图象关于直线$x=\frac{2\pi}{3}$对称，则（　　）

A．将函数$f(x)$的图象向右平移$\frac{2\pi}{3}$个单位长度，所得图象关于y轴对称

B．函数$f(x)$在$[\pi，2\pi]$上单调递减

C．若函数$f(x)$在区间$(a,\frac{14\pi}{9})$上没有最小值，则实数a的取值范围是$(-\frac{2\pi}{9},\frac{14\pi}{9})$

D．若函数$f(x)$在区间$(a,\frac{14\pi}{9})$上有且仅有 2 个零点，则实数a的取值范围是$(-\frac{4\pi}{3},0)$

12．已知函数：$\mathrm{R}\to\mathrm{R}$，对任意满足$x+y+z=0$的实数x,y,z，均有$f(x^3)+f^3(y)+f^3(z)=3xyz$，则（　　）

A．$f(0)=0$　　B．$f(2023)=2024$

C．$f(x)$是奇函数　　D．$f(x)$是周期函数

三、填空题

13．已知角α的顶点为坐标原点，始边与x轴的非负半轴重合，终边过点$P(1,3)$，则$\sin(\alpha+\pi)=$_________.

14．已知圆台的上、下底面半径分别为 1 和 2，体积为$\frac{14\pi}{3}$，则该圆台的侧面积为_________.

15．第 33 届奥运会将于 2024 年 7 月 26 日至 8 月 11 日在法国巴黎举行.某田径运动员准备参加 100 米、200 米两项比赛，根据以往赛事分析，该运动员 100 米比赛未能站上领奖台的概率为$\frac{1}{2}$，200 米比赛未能站上领奖台的概率为$\frac{3}{10}$，两项比赛都未能站上领奖台的概率为$\frac{1}{10}$，若该运动员在 100 米比赛中站上领奖台，则他在 200 米比赛中也站上领奖台的概率是_________.

16．已知抛物线Γ：$y^2=2x$与直线$l: y=-x+4$围成的封闭区域中有矩形$ABCD$，点A，

B 在抛物线上，点 C，D 在直线l上，则矩形对角线BD长度的最大值是_________.

四、解答题

17．在$\triangle ABC$中，角A、B、C所对的边分别为a、b、c，已知$\frac{c}{b}=1+2\cos A$.

(1)证明：$A=2B$；

(2)若$\sin B=\frac{3}{5}$，$c=13$，求$\triangle ABC$的面积.

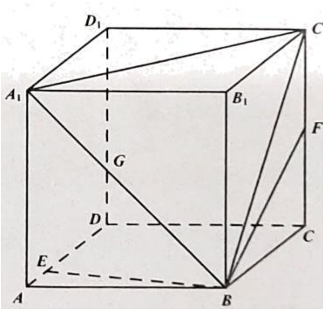
18．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，且对任意正整数 m，n 都有$a_{m+n}=a_n+a_m+2mn$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{(-1)^n a_n\}$的前 n 项和S_n.

五、未知

19．如图，已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为 4，点 E 满足$\overrightarrow{DE}=3\overrightarrow{EA}$，点 F 是CC_1的中点，点 G 满足$\overrightarrow{DG}=\frac{3}{5}\overrightarrow{GD_1}$



(1)求证：B,E,G,F四点共面；

(2)求平面EFG与平面A_1EF夹角的余弦值.

六、解答题

20．已知函数$f(x)=a\mathrm{e}^{2x}+(a-4)\mathrm{e}^x-2x$（e 为自然对数的底数，$\mathrm{e}=2.71828\cdots$）.

(1)讨论$f(x)$的单调性；

(2)证明：当$a>1$时，$f(x)>7\ln a-a-4$.

21．某中学在运动会期间，随机抽取了 200 名学生参加绳子打结计时的趣味性比赛，并对学生性别与绳子打结速度快慢的相关性进行分析，得到数据如下表：

性别	速度		合计
	快	慢	

男生	65		
女生		55	
合计	110		200

(1)根据以上数据，能否有99%的把握认为学生性别与绳子打结速度快慢有关？

(2)现有$n(n\in\mathrm{N}^*)$根绳子，共有$2n$个绳头，每个绳头只打一次结，且每个结仅含两个绳头，所有绳头打结完毕视为结束.

（i）当$n=3$，记随机变量X为绳子围成的圈的个数，求X的分布列与数学期望；

（ii）求证：这n根绳子恰好能围成一个圈的概率为$\frac{2^{2n-1}\cdot n!(n-1)!}{(2n)!}$.

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geq k)$	0.100	0.050	0.025	0.010
k	2.706	3.841	5.024	6.635

七、未知

22．已知双曲线C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的焦距为6，其中一条渐近线$l_1$的斜率为$\frac{\sqrt{5}}{2}$，过点$(t,0)(t>a)$的直线$l$与双曲线$C$的右支交于$P$，$Q$两点，$M$为线段$PQ$上与端点不重合的任意一点，过点$M$且与$l_1$平行的直线分别交另一条渐近线$l_2$和$C$于点$T,N$

(1)求C的方程；

(2)求$\frac{|MP||MQ|}{|OT||MN|}$的取值范围.

参考答案：

1．A

【分析】根据复数乘法及复数的虚部为 0 计算即可.

【详解】因为$z_1 \cdot z_2=(a-\mathrm{i})(1+b\mathrm{i})$=$(a+b)+(ab-1)\mathrm{i}$是实数，

所以$ab-1=0$，

故选：A

2．B

【分析】化简集合M,N，根据集合的交集、并集、补集求解.

【详解】因为$M=\{x|x^2-2x\geq 0\}=(-\infty,0]\cup[2,+\infty),N=\{x|y=\log_2(1-x)\}=(-\infty,1)$，

所以$M\cup N=(-\infty,1)\cup[2,+\infty)$，$N\cup(\complement_{\mathrm{U}}M)=(-\infty,1)\cup(0,2)=(-\infty,2)=\{x|x<2\}$，

$M\cup(\complement_{\mathrm{U}}N)=(-\infty,0]\cup[2,+\infty)\cup[1,+\infty)=(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$，

因为$M\cap N=(-\infty,0]$，所以$\complement_{\mathrm{U}}(M\cap N)=(0,+\infty)$，

故选：B

3．B

【分析】由题意先分别算出$\vec{a}^2,\vec{b}^2,\vec{a}\cdot\vec{b}$的值，然后将“$\lambda\vec{a}+\vec{b}$与$-3\vec{a}+2\vec{b}$垂直”等价转换为$\left(\lambda\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(-3\vec{a}+2\vec{b}\right)=0$，从而即可求解.

【详解】由题意有$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2=1,\vec{b}^2=\left|\vec{b}\right|^2=1,\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos60^{\circ}=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

又因为$\lambda\vec{a}+\vec{b}$与$-3\vec{a}+2\vec{b}$垂直，

所以$\left(\lambda\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(-3\vec{a}+2\vec{b}\right)=-3\lambda\vec{a}^2+(2\lambda-3)\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}^2=-3\lambda+\frac{1}{2}\times(2\lambda-3)+2=0$，

整理得$-2\lambda+\frac{1}{2}=0$，解得$\lambda=\frac{1}{4}$.

故选：B.

4．C

【分析】写出a_1+a_9的表达式，利用基本不等式即可得出结论.

【详解】由题意，

在等比数列$\{a_n\}$中，$a_5=5$，

设公比为q，则$a_1=a_5q^{-4}>0,a_9=a_5q^4>0$，

$\therefore a_1+a_9=a_5q^{-4}+a_5q^4=a_5(q^{-4}+q^4)\geq 5\times2\sqrt{q^{-4}\cdot q^4}=10$，

当且仅当$q^{-4}=q^4$即$q=\pm1$时等号成立，

$\therefore a_1+a_9$的最小值为 10，

故选：C.

5．D

【分析】根据指数函数、对数函数的性质可判断a,c小于 1，b大于 1，再由数形结合判断a,c即可.

【详解】令$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-\log_2 x=0$，可得$\left(\frac{1}{2}\right)^x=\log_2 x>0$，所以$x>1$，即$b>1$；

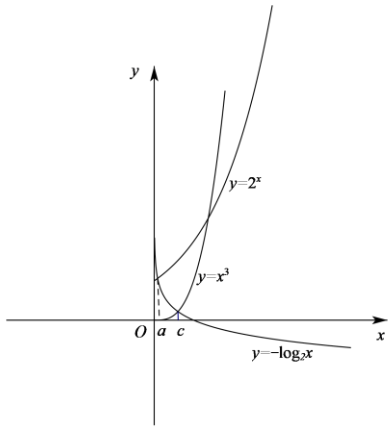
令$f(x)=2^x+\log_2 x=0$，可得$2^x=-\log_2 x>0$，即$\log_2 x<0$，所以$0<x<1$，

即$0<a<1$；

令$h(x)=x^3+\log_2 x=0$，可得$x^3=-\log_2 x$，由此可得$\log_2 x<0$，所以$0<x<1$，

即$0<c<1$，

作$y=2^x,y=-\log_2 x,y=x^3$的图象，如图，



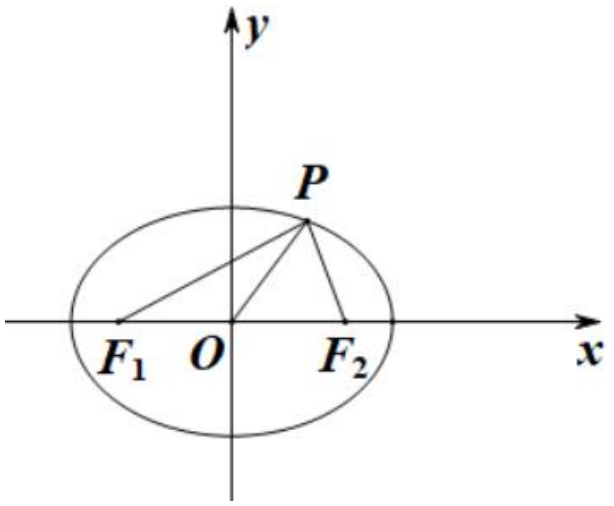
由图象可知，$a<c$，所以$a<c<b$.

故选：D

6．C

【分析】设$|PF_1|=m,|PF_2|=n$，利用余弦定理可得$\cos\angle F_1PF_2=\frac{m^2+n^2-8}{2mn}$，再由向量表示可知$\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}=2\overrightarrow{PO}$，即可得$m^2+n^2+2mn\cos\angle F_1PF_2=12$；联立即可求得$\cos\angle F_1PF_2=\frac{1}{3}$.

【详解】如下图所示：



不妨设$|PF_1| = m, |PF_2| = n$，根据椭圆定义可得$m + n = 2a = 4$，$|F_1F_2| = 2c = 2\sqrt{2}$；

由余弦定理可知$\cos\angle F_1PF_2 = \frac{m^2+n^2-8}{2mn}$；

又因为$\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2} = 2\overrightarrow{PO}$，所以$\left(\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}\right)^2 = \left(2\overrightarrow{PO}\right)^2$，又$|OP| = \sqrt{3}$，

即可得$m^2 + n^2 + 2mn\cos\angle F_1PF_2 = 12$，解得$m^2 + n^2 = 10$；

又$m^2 + n^2 = (m+n)^2 - 2mn = 16 - 2mn = 10$，即$mn = 3$；

所以可得$\cos\angle F_1PF_2 = \frac{m^2+n^2-8}{2mn} = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3}$；

故选：C

7．D

【分析】设点O在平面PAB、平面ABC内的射影点分别为M、N，设球O切AB于点E，连接ME、NE、MN，分析可知，O、M、E、N四点共圆，利用二面角的定义可得$\angle MEN = \frac{3\pi}{4}$或$\frac{\pi}{4}$，利用余弦定理求出$MN$的长，分析可知，球$O$半径$OE$的最大值即为$\triangle MNE$外接圆的直径，结合正弦定理求解即可.

【详解】设点O在平面PAB、平面ABC内的射影点分别为M、N，

设球O切AB于点E，连接ME、NE、MN，如下图所示：

因为$OM \perp$平面PAB，$AB \subset$平面PAB，则$AB \perp OM$，

由球的几何性质可知，$OE \perp AB$，

因为$OM \cap OE = O$，OM、$OE \subset$平面OME，则$AB \perp$平面OME，

同理可知，$AB \perp$平面ONE，

因为过点E作直线AB的垂面，有且只有一个，所以，平面OME、平面ONE重合，

因为$OM \perp$平面PAB，$ME \subset$平面PAB，则$OM \perp ME$，同理可知，$ON \perp NE$，

所以，O、M、E、N四点共圆，

由已知条件可知，$ME=1$，$NE=\sqrt{2}$，

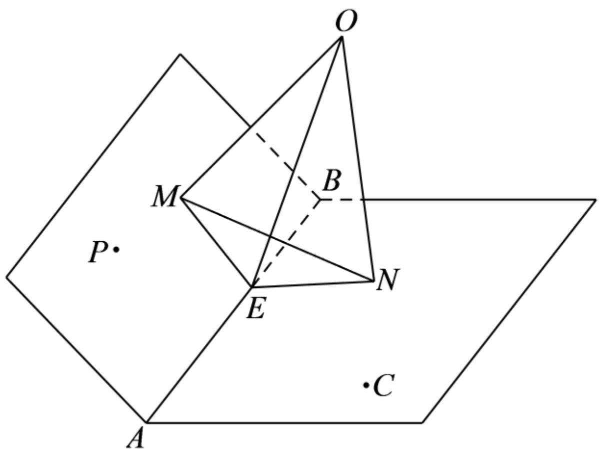
因为$AB\perp$平面OME，NE、$ME\subset$平面OME，则$AB\perp ME$，$AB\perp NE$，

所以，二面角$P-AB-C$的平面角为$\angle MEN$或其补角.

①当$\angle MEN=\frac{3\pi}{4}$时，

由余弦定理可得$MN^2=ME^2+NE^2-2ME\cdot NE\cos\frac{3\pi}{4}=1+2-2\times1\times\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

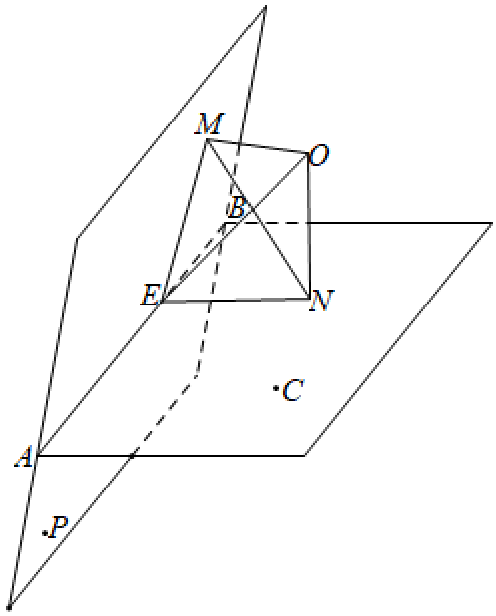
$=5$，故$MN=\sqrt{5}$，



易知，OE为$\triangle MNE$外接圆的一条弦，

所以，球O半径OE的最大值即为$\triangle MNE$外接圆的直径，即为$\frac{MN}{\sin\angle MEN}=\frac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{10}$；

②当$\angle MEN=\frac{\pi}{4}$时，



由余弦定理可得$MN^2 = ME^{\ 2} + NE^2 - 2ME \cdot NE\cos\frac{\pi}{4} = 1 + 2 - 2 \times 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

故$MN = 1$，

易知，OE为$\triangle MNE$外接圆的一条弦，

所以，球O半径OE的最大值即为$\triangle MNE$外接圆的直径，即为$\frac{MN}{\sin\angle MEN} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$.

综上所述，球O的半径的最大可能值为$\sqrt{10}$.

故选：D.

8．B

【分析】由题意有$\begin{cases} -2 \le 1 + a + b \le 2, (1) \\ -2 \le 9 + 3a + b \le 2, (2) \\ -2 \le 25 + 5a + b \le 2, (3) \end{cases}$，通过分析得到$a = -6$，$b = 7$是满足题意的唯一解，注意检验.

【详解】由题意若不等式$|f(x)| \le 2$在$x \in [1,5]$上恒成立，

则必须满足$\begin{cases} -2 \le f(1) \le 2 \\ -2 \le f(3) \le 2 \\ -2 \le f(5) \le 2 \end{cases}$，即$\begin{cases} -2 \le 1 + a + b \le 2, (1) \\ -2 \le 9 + 3a + b \le 2, (2) \\ -2 \le 25 + 5a + b \le 2, (3) \end{cases}$，

由$\begin{cases} -2 \le -1 - a - b \le 2, (1) \\ -2 \le 9 + 3a + b \le 2, (2) \end{cases}$，两式相加得$-4 \le 8 + 2a \le 4 \Rightarrow -6 \le a \le -2, (4)$，

再由$\begin{cases} -2 \le -9 - 3a - b \le 2, (2) \\ -2 \le 25 + 5a + b \le 2, (3) \end{cases}$，两式相加得$-4 \le 16 + 2a \le 4 \Rightarrow -10 \le a \le -6, (5)$，

结合（4），（5）两式可知$a = -6$，代入不等式组得$\begin{cases} -2 \le -5 + b \le 2, (1) \\ -2 \le -9 + b \le 2, (2) \\ -2 \le -5 + b \le 2, (3) \end{cases}$，

解得$b = 7$，

经检验，当$a=-6$，$b=7$时，$f(x)=x^2-6x+7=(x-3)^2-2$，

有$[f(x)]_{\max}=f(1)=f(5)=2$，$[f(x)]_{\min}=f(3)=-2$，满足$|f(x)|\le 2$在$x\in[1,5]$上恒成立，

综上所述：满足要求的有序数对(a,b)为：$(-6,7)$，共一个.

故选：B.

【点睛】关键点点睛：解题的关键是首先得到$\begin{cases}-2\le f(1)\le 2\\-2\le f(3)\le 2\\-2\le f(5)\le 2\end{cases}$，进一步由不等式的性质通过分析即可求解.

9．ABD

【分析】根据二项展开式通式以及赋值法即可得到答案.

【详解】对于 A， 取 $x=0$, 则 $a_0=1$ ，则 A 正确；

对 B，根据二项式展开通式得$(1-2x)^5$的展开式通项为$\mathrm{C}_5^r 1^{5-r}(-2x)^r$，即$\mathrm{C}_5^r\cdot(-2)^r\cdot x^r$，其中$0\le r\le 5, r\in\mathrm{N}$

所以$a_3=\mathrm{C}_5^3(-2)^3=-80$，故 B 正确；

对 C，取$x=1$，则$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-1$，

则$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-1-a_0=-2$，故 C 错误；

对 D，取$x=-1$，则$a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5=3^5=243$，

将其与$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-1$作和得$2(a_0+a_2+a_4)=242$，

所以$a_0+a_2+a_4=121$，故 D 正确；

故选：ABD.

10．BC

【分析】对于 A，整理圆的方程为标准方程，明确圆心与半径，可得答案；

对于 B，由题意，将圆心代入直线方程，求得参数，可得答案；

对于 C，利用点到直线的距离公式求得三角形的高，结合三角形的面积公式，可得答案；

对于 D，根据两点求得斜率，利用垂直直线斜率的关系，可得答案.

【详解】由圆的方程$x^2+y^2-8x+6y=0$，

则$(x-4)^2+(y+3)^2=25$，所以圆心$M(4,-3)$，半径$r=5$，

易知$|PQ|=10$，故 A 错误；

将$M(4,-3)$代入直线方程$x+my-m-2=0$，则$4-3m-m-2=0$，解得$m=\frac{1}{2}$，故 B