四川省成都市第七中学2024届高三上学期理科数学综合测试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知集合$A=\{1,a^2\}$，$B=\{-1,0,1\}$，若 $A\cup B=B$，则A中元素的和为（ ）

A．0　　B．1　　C．2　　D．-1

2．设i为虚数单位，复数$\frac{a+i}{2-i}$为纯虚数，则$a=$.

A．2　　B．-2　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{2}$

3．下列命题中一定正确的是（　　）.

A．如果平面$\alpha\perp$平面β，那么平面α内所有直线都垂直于平面β

B．如果平面$\alpha\perp$平面β，直线m与平面α垂直，那么$m//\beta$

C．如果平面α不垂直于平面β，那么平面α内一定不存在直线垂直于平面β

D．如果直线l与平面α相交但不垂直，m为空间内一条直线，且$m\perp l$，那么m与平面α相交

4．设向量$\vec{a}=(1,x-1)$，$\vec{b}=(x+1,3)$，则“$x=2$”是“$\vec{a}//\vec{b}$”的

A．充分但不必要条件　　B．必要但不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

5．造纸术、印刷术、指南针、火药被称为中国古代四大发明，这四种发明对中国古代的政治、经济、文化的发展产生了巨大的推动作用；2017年5月，来自“一带一路”沿线的20国青年评选出了“中国的新四大发明”：高铁、扫码支付、共享单车和网购．若从这8个发明中任取两个发明，则两个都是新四大发明的概率为（　）

A．$\frac{1}{14}$　　B．$\frac{1}{7}$　　C．$\frac{3}{14}$　　D．$\frac{1}{4}$

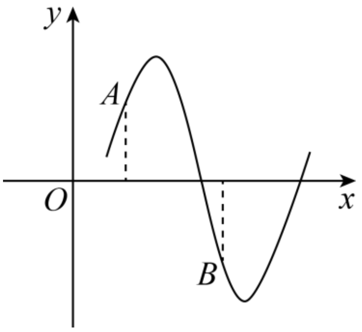
6．已知△ABC的内角A，B，C成等差数列，若$\sin(B+\alpha)=\frac{3}{5}+\sin\alpha$，则$\sin(\alpha+300°)=$（　）

A．$\frac{3}{5}$　　B．$-\frac{4}{5}$　　C．$\frac{4}{5}$　　D．$-\frac{3}{5}$

7．$\left(2-\frac{1}{x^2}\right)(1+ay)^6$展开式中$x^{-2}y^3$项的系数为160，则$a=$（　）

A．2　　B．4　　C．-2　　D．$-2\sqrt{2}$

8．已知函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$，$(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$的部分图象如图所示，$f(x)$的图象过$A\left(\frac{\pi}{4},1\right)$，$B\left(\frac{5\pi}{4},-1\right)$两点，将$f(x)$的图象向左平移$\frac{7\pi}{12}$个单位得到$g(x)$的图象，则函数$g(x)$在$\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$上的最小值为（　　）



A．$-\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$-\sqrt{3}$　　D．-1

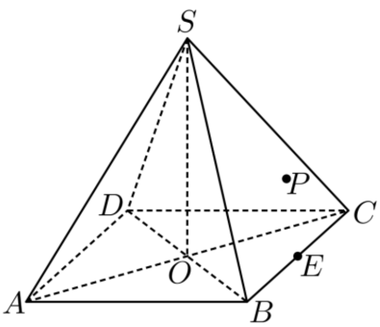
9．学校运动会上，有A，B，C三位运动员分别参加 3000 米，1500 米和跳高比赛，为了安全起见，班委为这三位运动员分别成立了后勤服务小组，甲和另外四个同学参加后勤服务工作（每个同学只能参加一个后勤服务小组）.若甲在 A 的后勤服务小组，则这五位同学的分派方案有（　　）种

A．44　　B．50　　C．42　　D．38

10．已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，$B$是椭圆$C$的上顶点，直线$x=\frac{1}{3}c$与直线$BF_2$交于点$A$，若$\angle AF_1F_2=\frac{\pi}{4}$，则椭圆$C$的离心率为（　　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

11．如图，已知四棱锥$S-ABCD$的底面是边长为 6 的菱形，$\angle BAD=60°$，AC，BD相交于点O，$SO\perp$平面$ABCD$，$SO=4$，E是BC的中点，动点P在该棱锥表面上运动，并且总保持$PE\perp AC$，则动点P的轨迹的长为（　　）



A．3　　B．7　　C．13　　D．8

12．已知函数$f(x)$的导函数是$f'(x)$，$f'(x-1)$的图象关于点$(1,0)$对称，对任意实数x都有$f(x)=f(2-x)$，且$f(x)$在$[-7,-6]$上单调递增，设$a=f\left(\ln\frac{6e}{5}\right),b=f(e^{0.2}-1),c=f\left(\frac{2}{9}\right)$，则$a,b,c$的大小关系是（　　）

A．$c < b < a$　　B．b<c<a

C．$a < b < c$　　D．$a < c < b$

二、填空题

13．已知点$A(2\sqrt{2},2)$在双曲线C上，直线$y=\pm\frac{1}{2}x$是双曲线C的渐近线，则双曲线C的标准方程是________

14．已知函数$f(x)=x\ln x$在点$P\left(x_0,f(x_0)\right)$处的切线与直线$x+y=0$垂直，则切点$P\left(x_0,f(x_0)\right)$的坐标为__________.

三、双空题

15．已知点O,A,B,C在同一平面，且A,B,C三点不共线，且满足$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，其中$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{6}$，$|\overrightarrow{OB}|=2$，$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{14}$，则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$的值为________，则$\triangle AOB$的面积为________.

四、填空题

16．已知$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c．若$2\sin B\sin C\cos A+\cos 2A=1$，则$\frac{a^2}{bc}$的最小值为_____.

五、解答题

17．已知首项为 4 的数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，且$S_{n+1}+a_n=S_n+6\times 5^n$.

(1)求证：数列$\{a_n-5^n\}$为等比数列；

(2)求数列$\{a_n\}$的前 n 项和S_n.

18．从 2020 年元月份以来，全世界的经济都受到了新冠病毒的严重影响，我国抗疫战斗取得了重大的胜利，全国上下齐心协力复工复产，抓经济建设；某公司为了提升市场的占有率，准备对一项产品实施科技改造，经过充分的市场调研与模拟，得到x，y之间的五组数据如下表：

x	2	3	5	7	8
y	5	8	12	14	16

其中，x（单位：百万元）是科技改造的总投入，y（单位：百万元）是改造后的额外收益；设$U=2x+y$是对当地生产总值增长的贡献值.

（1）若从五组数据中任取两组，求恰有一组满足$U>30$的概率；

（2）记ξ为$U>20$时的任意两组数据对应的贡献值的和，求随机变量ξ的分布列和数学期望；

（3）利用表中数据，甲、乙两个调研小组给出的拟合直线方程分别为甲组：$\hat{y}=2x+1$，乙组：$\hat{y}=\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}$，试用最小二乘法判断哪条直线的拟合效果更好？

附：对于一组数据$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots(x_n,y_n)$，其拟合直线方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$的残差平方和为$D=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{b}x_i-\hat{a}\right)^2$，$D$越小拟合效果越好.

19．如图1，在$\triangle ABC$中，$AB=\sqrt{2}BC=2\sqrt{2},\angle ABC=\frac{3\pi}{4}$，$D$为$AC$的中点，将$\triangle ABD$沿$BD$折起，得到如图2所示的三棱锥$P-BCD$，二面角$P-BD-C$为直二面角.

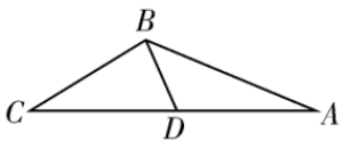


图1

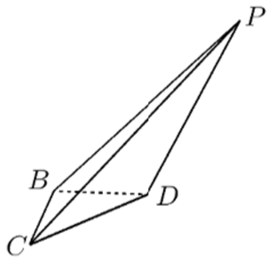


图2

(1)求证：$BC\perp$平面PBD；

(2)设E为PC的中点，$\overrightarrow{CF}=3\overrightarrow{FB}$，求二面角$C-DE-F$的余弦值.

20．已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过$F_2$的直线$l$与椭圆交于$A$，$B$两点，$P$为椭圆的下顶点，$\triangle OPF_2$为等腰三角形，当$l\perp x$轴时，$\triangle OAB$的面积为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（1）求椭圆C的标准方程；

（2）若直线l不与坐标轴垂直，线段AB的中垂线l'与y轴交于点M，若直线F_1M的斜率为$\frac{1}{3}$，求直线l的方程.

21．已知函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(6+a)x^2+(8+6a)x-8a\ln x-4a$，其中$a\in\mathrm{R}$.

(1)若$a=2$，求$f(x)$的单调区间；

(2)已知$f(2)=f(4)$，解关于x的不等式$f(x)\leq 8$.（参考数据：$\frac{2}{3}<\ln2<\frac{17}{24}$）

22．在平面直角坐标系xOy中，直线l过定点$P(3,0)$，倾斜角为$\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，曲线$C$的参数方程为$\begin{cases}x=t+\frac{1}{t}\\y=\frac{t}{2}-\frac{1}{2t}\end{cases}$（$t$为参数）；以原点$O$为极点，$x$轴的正半轴为极轴，建立极坐

标系．

（1）求曲线C的极坐标方程；

（2）已知直线l交曲线C于M，N两点，且$|PM|\cdot|PN|=\frac{10}{3}$，求$l$的参数方程．

23．已知函数$f(x)=x^2-a|x-1|-1$，$a\in R$．

（1）当$a=2$时，解不等式$f(x)+f(2)\geq 0$；

（2）对任意的$x\in\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$，$f(x)\geq a|x+1|$恒成立，求实数$a$的取值范围．

参考答案：

1．B

【解析】由已知条件可得$B \subseteq A$，进而可得出关于a的等式，求出a的值，即可求得A中元素的和.

【详解】$\because A \cup B = B$，$\therefore A \subseteq B$，$\therefore a^2 = 0$，则$a = 0$，$\therefore A = \{1,0\}$，

因此，集合A中元素的和为$0 + 1 = 1$.

故选：B.

2．D

【解析】整理$\frac{a+i}{2-i}$得：$\frac{a+i}{2-i} = \frac{(2a-1)+(a+2)i}{5}$，由复数$\frac{a+i}{2-i}$为纯虚数列方程即可得解.

【详解】因为$\frac{a+i}{2-i} = \frac{(a+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{(2a-1)+(a+2)i}{5}$

又它是纯虚数，所以$\frac{2a-1}{5} = 0$，解得：$a = \frac{1}{2}$

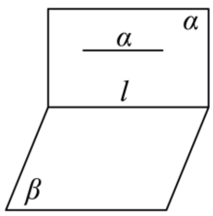
故选 D

【点睛】本题主要考查了复数的除法运算，还考查了复数的相关概念，考查方程思想，属于基础题.

3．C

【分析】按立体几何的性质逐项判断即可.

【详解】如图，平面 $\alpha \perp$平面β，$\alpha \cap \beta = l$，l在α内但不垂直于平面β，所以 A 错误；



B 错误：m在β内时可与平面 α 垂直但不平行于β；

C 正确：如果平面 α 不垂直于平面 β，那么由面面垂直的判断定理得平面 α 内一定不存在直线垂直于平面 β;

D 错误：m在平面α内时可垂直于l但不与α相交.

故选：C.

4．A

【分析】利用充要条件的判断方法进行判断即可.

【详解】若$x = 2$，则$\vec{a} = (1,1)$，$\vec{b} = (3,3)$，则$\vec{a} // \vec{b}$；但当$\vec{a} // \vec{b}$时，$x = \pm 2$,

故“$x=2$”是“$\vec{a}//\vec{b}$”的充分但不必要条件.

选 A.

【点睛】本题考查充分不必要条件条件的判断，属基础题.

5．C

【解析】这是一个古典概型，先求得从 8 个发明中任取两个发明的基本事件数，再求得两个都是新四大发明基本事件数，代入公式求解.

【详解】从 8 个发明中任取两个发明共有$C_8^2=28$种，

两个都是新四大发明的有$C_4^2=6$种，

∴所求概率为$P=\frac{6}{28}=\frac{3}{14}$，

故选：C

6．D

【解析】由等差中项的性质求出B，再由辅助角公式得到$\cos(30°+\alpha)=\frac{3}{5}$，最后再由诱导公式计算可得；

【详解】解：∵A，B，C成等差数列，∴$2B=A+C$，又$A+B+C=180°$，∴$B=60°$，

由$\sin(60°+\alpha)=\frac{3}{5}+\sin\alpha$得，$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha=\frac{3}{5}$，∴$\cos(30°+\alpha)=\frac{3}{5}$，则$\sin(\alpha+300°)=\sin(270°+30°+\alpha)=-\cos(30°+\alpha)=-\frac{3}{5}$，

故选：D.

7．C

【解析】先求得$(1+ay)^6$展开式中y^3的系数，可得$\left(2-\frac{1}{x^2}\right)(1+ay)^6$展开式中$x^{-2}y^3$的系数，从而得答案.

【详解】二项式$(1+ay)^6$展开式的通项为$T_{r+1}=C_6^r\times1^{6-r}(ay)^r=C_6^r a^r y^r$，

令$r=3$可得二项式$(1+ay)^6$展开式中y^3的系数为$C_6^3a^3$，

∴$\left(2-\frac{1}{x^2}\right)(1+ay)^6$展开式中$x^{-2}y^3$的系数为$(-1)C_6^3a^3=160$，

可得$a^3=-8$，解得$a=-2$，

故选：C.

8．A

【解析】根据$f(x)$的图象过$A\left(\frac{\pi}{4},1\right)$，$B\left(\frac{5\pi}{4},-1\right)$两点，求得周期，进而求得$\omega=1$，然后将

点$A\left(\frac{\pi}{4},1\right)$的坐标代入求得$f(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$，再 将$f(x)$的图象向左平移$\frac{7\pi}{12}$个单位得到函数$g(x)=2\cos x$，利用余弦函数的单调性求解.

【详解】由图象知，$\frac{T}{2}=\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\pi$，

$\therefore T=2\pi$，则$\omega=1$，

$\therefore f(x)=2\sin(x+\varphi)$，

将点$A\left(\frac{\pi}{4},1\right)$的坐标代入得，$2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=1$，即$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=\frac{1}{2}$，

又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \varphi=-\frac{\pi}{12}$，

则$f(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$，

将$f(x)$的图象向左平移$\frac{7\pi}{12}$个单位得到函数$g(x)=2\sin\left(x+\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos x$，

$\therefore g(x)$在$\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$上的最小值为$2\cos\frac{3\pi}{4}=-\sqrt{2}$，

故选：A

9．B

【分析】分三类，A 小组只有一人，只有两人，恰有三人三种情况，再利用分类加法计数原理求解.

【详解】若 A 小组只有一人，则 5 人的分配方案有$C_4^2C_2^2+C_4^3A_2^2$种；

若 A 小组只有两人，则 5 人的分配方案有$C_4^1C_3^2A_2^2$种；

若 A 小组恰有三人，则 5 人的分配方案有$C_4^2A_2^2$种，

所以共有 50 种，

故选：B.

10．A

【解析】根据$B(0,b)$，$F_2(c,0)$，写出直线BF_2的方程，与$x=\frac{1}{3}c$联立求得点 A，再由$\angle AF_1F_2=\frac{\pi}{4}$求解.

【详解】由题设知，$B(0,b)$，$F_2(c,0)$，

$\therefore$直线BF_2的方程为$\frac{x}{c}+\frac{y}{b}=1$，联立$\begin{cases}x=\frac{1}{3}c\\ \frac{x}{c}+\frac{y}{b}=1\end{cases}$得，$A\left(\frac{1}{3}c,\frac{2}{3}b\right)$，

设直线$x=\frac{1}{3}c$与x轴交于点M，则$|F_1M|=\frac{4}{3}c$，$|MA|=\frac{2}{3}b$，

$\because \angle AF_1F_2=\frac{\pi}{4}$，

$\therefore |F_1M|=|MA| \Rightarrow \frac{4}{3}c=\frac{2}{3}b$，即$b=2c$，

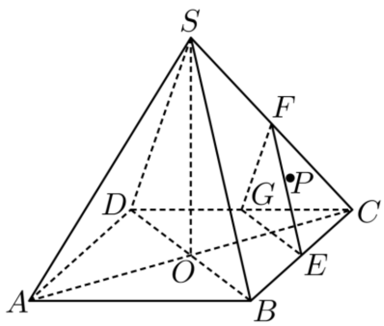
$\therefore a^2-c^2=4c^2$，即$a^2=5c^2$，

$\therefore e^2=\frac{1}{5} \Rightarrow e=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

故选：A

11．D

【分析】取DC，SC的中点G，F，连接GE，FE，利用中位线可得到$GE//DB$，$FE//SB$，再利用线面平行以及面面平行的判定定理得到平面$FEG//$平面SBD，再利用线面垂直的判定定理得到$AC\perp$平面SBD，进而得到$AC\perp$平面FEG，可得动点P的轨迹的周长即为$\triangle FEG$的周长，求解即可.



【详解】

取DC，SC的中点G，F，连接GE，FE，

$\because E$是BC的中点，

$\therefore GE//DB$，$FE//SB$，

$GE\not\subset$平面SBD，$DB\subset$平面SBD，

则$GE//$平面SBD；

$FE\not\subset$平面SBD，$SB\subset$平面SBD，

则$FE//$平面SBD，

又$GE\cap FE=E$，

$\therefore$平面$FEG//$平面SBD，

$\because SO\perp$平面$ABCD$，

$\therefore SO\perp AC$，

又四边形$ABCD$是菱形，

$\therefore DB\perp AC$，