

2021 年河南省开封市高考数学三模试卷（理科）

一、单选题（本大题共 12 小题，共 60.0 分）

1. (2021·河南省开封市·模拟题)已知集合 $A = \{x | |x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}\}$, $B = \{x | 0 < x < a\}$, 若 $A \subseteq B$, 则实数 a 的范围是()

- A. $(0,1)$ B. $(0,1]$ C. $(1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

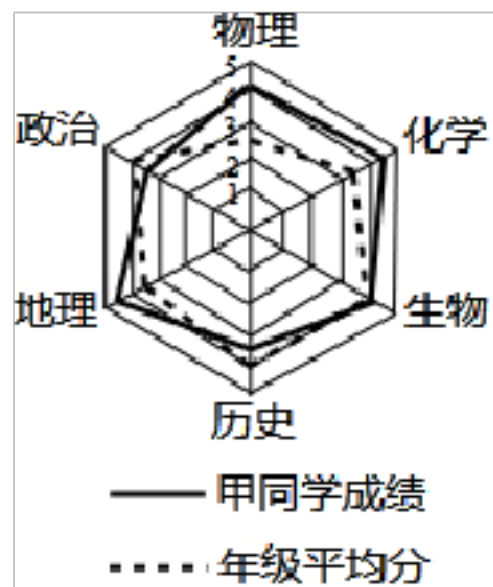
2. (2021·河南省开封市·模拟题)设复数 z 满足 $|z| = |z - i| = 1$, 且 z 的实部大于虚部, 则 $z =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ C. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ D. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

3. (2021·河南省开封市·模拟题)“方程 $\frac{x^2}{m-1} - \frac{y^2}{m+2} = 1$ 表示双曲线”的一个必要不充分条件为()

- A. $m \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ B. $m \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$
C. $m \in (-\infty, -2)$ D. $m \in (1, +\infty)$

4. (2021·甘肃省武威市·模拟题)2021 年开始, 我省将试行“3 + 1 + 2”的普通高考新模式, 即除语文数学、外语 3 门必选科目外, 考生再从物理、历史中选 1 门, 从化学、生物、地理、政治中选 2 门作为选考科目. 为了帮助学生合理选科, 某中学将高一每个学生的六门科目综合成绩按比例均缩放成 5 分制, 绘制成雷达图. 甲同学的成绩雷达图如图所示, 下面叙述一定不正确的是()



- A. 甲的物理成绩领先年级平均分最多
B. 甲有 2 个科目的成绩低于年级平均分
C. 甲的成绩从高到低的前 3 个科目依次是地理化学、历史
D. 对甲而言, 物理、化学、地理是比较理想的一种选科结果

5. (2021·江西省九江市·模拟题)已知 $\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\cos 2\alpha =$ ()

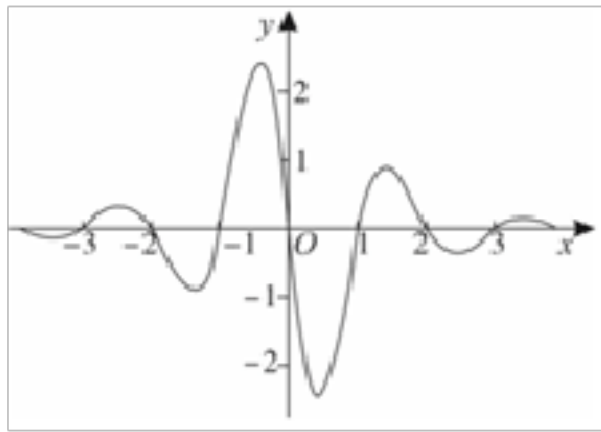
- A. $-\frac{7}{8}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. 0

6. (2021·河南省开封市·模拟题) $(a - x)(1 + x)^6$ 的展开式中 x 的奇数次幂项的系数之和为 64, 则实数 $a =$ ()

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

7. (2021·河南省开封市·模拟题)已知函数 $f(x) = \frac{4\cos(\omega x - \varphi)}{e^{|x|}}$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的部分

图象如图所示, 则 $\frac{\omega}{\varphi} = ()$



A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. 2

D. $\frac{2}{\pi}$

8. (2021·河南省开封市·模拟题)某几何体的三视图如图所示,

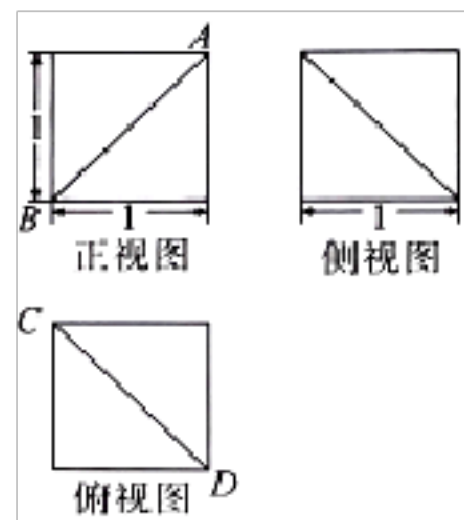
关于该几何体有下述四个结论:

①体积可能是 $\frac{5}{6}$;

②体积可能是 $\frac{2}{3}$;

③ AB 和 CD 在直观图中所对应的棱所成的角为 $\frac{\pi}{3}$;

④在该几何体的面中, 互相平行的面可能有四对.



其中所有正确结论的编号是()

A. ①③

B. ②④

C. ①②③

D. ①②③④

9. (2021·河南省开封市·模拟题)若 $2a = 5b = zc$, 且 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$, 则 z 的值可能为()

A. $\sqrt{7}$

B. $\sqrt{10}$

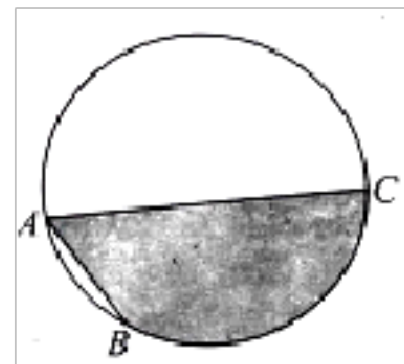
C. 7

D. 10

10. (2021·河南省开封市·模拟题)如图, A, B, C 是半径为 1 的

圆周上的点, 且 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, $AB = AC = \sqrt{6}$, 则图中阴影区

域的面积()



A. $\frac{\pi}{3}$

B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

11. (2021·河南省开封市·模拟题)某校组织甲、乙两个班的学生到“农耕村”参加社会实践活动,某天安排有酿酒、油坊、陶艺、打铁、纺织、竹编制作共六项活动可供选择,每个班上午、下午各安排一项活动(不重复),且同一时间内每项活动都只允许一个班参加,则活动安排方案的种数为()

- A. 126 B. 360 C. 600 D. 630

12. (2021·河南省开封市·模拟题)已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$.若椭圆 C 上存在一点 P ,使得 $\frac{\sin \angle PF_2F_1}{\sin \angle PF_1F_2} = \frac{c}{a}$,则椭圆 C 的离心率的取值范围为()

- A. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ B. $(0, \sqrt{2} - 1)$ C. $(\sqrt{2} - 1, 1)$ D. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$

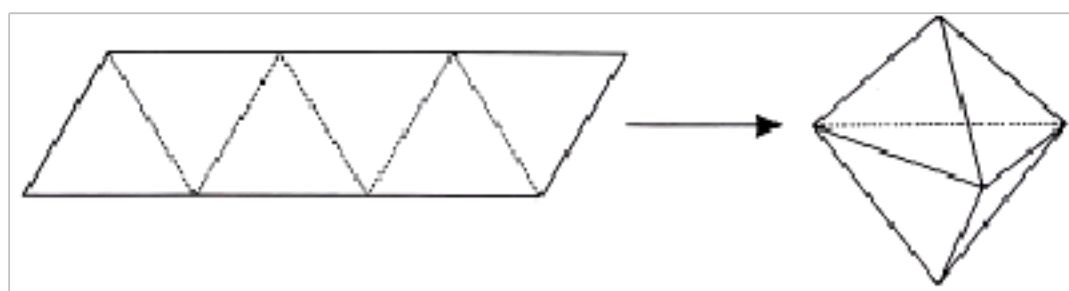
二、单空题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分)

13. (2021·河南省开封市·模拟题)已知 $\{a_n\}$ 为等差数列,且 $3a_5 = 2a_7$,则 $a_1 =$ _____ .

14. (2021·河南省开封市·模拟题)已知向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$,若 $|\vec{b}| = 1$,则 \vec{a} 在 \vec{b} 方向上的投影为_____ .

15. (2021·河南省开封市·模拟题)在平面直角坐标系 xOy 中, P 是曲线 $y = x^2 + \frac{1}{x}(x > 0)$ 上的一个动点,则点 P 到直线 $y = x$ 的距离的最小值是_____ .

16. (2021·河南省开封市·模拟题)农历五月初五是端午节,民间有吃粽子的习惯,粽子又称粽粿,古称“角黍”.如图,是由六个边长为 3 的正三角形构成的平行四边形形状的纸片,某同学将其沿虚线折起来,制作了一个粽子形状的六面体模型,则该六面体的体积为_____ ;若该六面体内有一球,则该球体积的最大值为_____ .

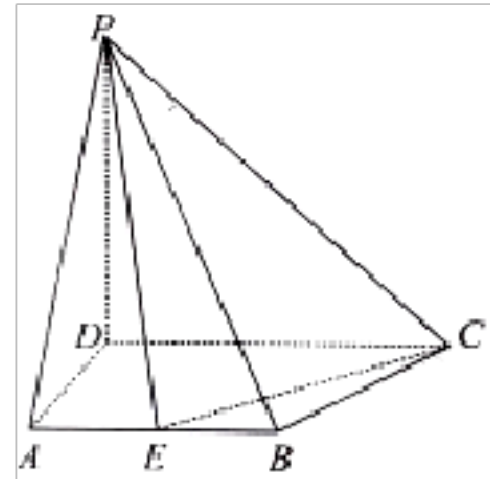


三、解答题 (本大题共 7 小题, 共 82.0 分)

17. (2021·河南省开封市·模拟题)已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = -2, a_{n+1} = 2a_n + 4$.

- (1)求 a_2, a_3, a_4 ;
- (2)猜想 $\{a_n\}$ 的通项公式并加以证明;
- (3)求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (2021·河南省开封市·模拟题)如图, 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, $AB // CD$, 且 $\angle BAP = \angle CDP = 90^\circ$.



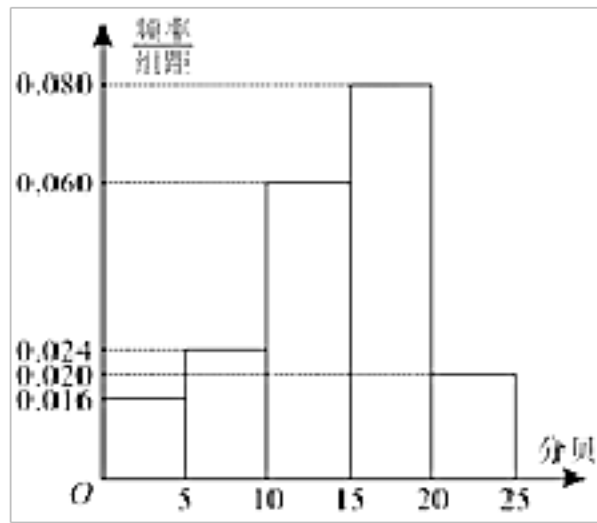
(1)证明: $AD \perp CD$;

(2)已知 $CD = PD = 4$, $AB = AD = 3$, $\angle ADP = 90^\circ$.在棱 AB 上是否存在一点 E , 使得平面 PAD 与平面 PCE 所成的锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$? 若存在, 求出 $\frac{AE}{EB}$ 的值, 若不存在, 请说明理由.

19. (2021·河南省开封市·模拟题)人耳的听力情况可以用电子测听器检测, 正常人听力的等级为 $0 - 25dB$ (分贝), 并规定测试值在区间 $(0,5]$ 为非常优秀, 测试值在区间 $(5,10]$ 为优秀.某班 50 名同学都参加了听力测试, 将所得测试值制成如图频率分布直方图:

(1)现从测试值在区间 $(0,10]$ 内的同学中任意抽取 4 人, 其中听力非常优秀的同学人数为 X , 求 X 的分布列与数学期望;

(2)现选出一名同学参加另一项测试, 测试规则如下: 四个音叉的发音情况不同, 由强到弱的编号分别为 1, 2, 3, 4.测试前将音叉顺序随机打乱, 被测试的同学依次听完后, 将四个音叉按发音由强到弱重新排序, 所对应的音叉编号分别为 a_1, a_2, a_3, a_4 (其中 a_1, a_2, a_3, a_4 为 1, 2, 3, 4 的一个排列).记 $Y = |1 - a_1| + |2 - a_2| + |3 - a_3| + |4 - a_4|$, 可用 Y 描述被测试者的听力偏离程度, 求 $Y \leq 2$ 的概率.



20. (2021·河南省开封市·模拟题)已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , P 是抛物线 C 上一点, 且满足 $\overline{FP} = (0, -2)$.

(1)求抛物线 C 的方程;

(2)已知直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 15$, 线段 AB 的中点 M 在直线 $x = 1$ 上.

(②)求直线 l 的方程;

(③)证明: $|\overline{FA}|, |\overline{FP}|, |\overline{FB}|$ 成等差数列, 并求该数列的公差.

21. (2021·河南省开封市·模拟题)已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{mx^2}$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)若 $m = 2$, 对于任意 $x_1 > x_2 > 0$, 证明: $(x_1^2 \cdot f(x_1) - x_2^2 \cdot f(x_2)) \cdot (x_1^2 + x_2^2) > x_1 x_2 - x_2^2$.

22. (2021·河南省开封市·模拟题)已知在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x = t\cos\alpha \\ y = 2 + t\sin\alpha \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$
以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,

曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 = \frac{3}{1+2\sin^2\theta}$.

(1)求曲线 C 的直角坐标方程;

(2)设点 $P(0,2)$, 若直线 l 与曲线 C 交于不同的两点 A, B , 求 $|PA| + |PB|$ 的取值范围.

23. (2021·河南省开封市·模拟题)已知函数 $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$, $g(x) = |x - 1|$.

(1)求函数 $y = f(x) + g(x)$ 的最小值;

(2)已知 $\theta \in [0, 2\pi)$, 求关于 θ 的不等式 $f(\sin\theta) + g(\cos\theta) > \frac{5}{2}$ 的解集.

答案和解析

1. 【答案】D

【知识点】集合的基本关系

【解析】解：因为集合 $A = \{x \mid |x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}\} = \{x \mid 0 < x < 1\}$ ，又 $B = \{x \mid 0 < x < a\}$ ，

当 $A \subseteq B$ ，则有 $a \geq 1$ 。

故选：D。

先利用含有绝对值的不等式的解法求出集合A，然后由子集的定义求解即可。

本题考查了集合子集的理解和应用，涉及了含有绝对值的不等式的解法，属于基础题。

2. 【答案】B

【知识点】复数的模

【解析】解：设 $z = a + bi$ ， $(a, b \in R)$ ，

\because 复数 z 满足 $|z| = |z - i| = 1$ ，

$\therefore \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ ， $\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = 1$ ，

即 $x^2 + y^2 = 1$ ， $x^2 + y^2 - 2y = 0$ ，

解得 $y = \frac{1}{2}$ ， $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

\because z 的实部大于虚部，

$\therefore x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$\therefore z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ，

故选：B。

设 $z = a + bi$ ， $(a, b \in R)$ ，由复数 z 满足 $|z| = |z - i| = 1$ ，利用模的计算公式可得关于 x ， y 的方程组，进而得出结论。

本题考查了复数的运算法则、模的计算公式，考查了推理能力与计算能力，属于基础题。

3. 【答案】A

【知识点】必要条件、充分条件与充要条件的判断、双曲线的性质及几何意义

【解析】解：方程 $\frac{x^2}{m-1} - \frac{y^2}{m+2} = 1$ 为双曲线时， $(m+2)(m-1) > 0$

$\therefore m \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ ，

$\because (-\infty, -2) \cup (1, +\infty) \subsetneq (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ，

“方程 $\frac{x^2}{m-1} - \frac{y^2}{m-2} = 1$ 表示双曲线”的一个必要不充分条件为 $m \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

故选：A.

利用双曲线的定义求出 m 的范围，再根据子集的包含关系判断即可.

本题考查了充分必要条件的判断，考查了双曲线的定义，属于基础题.

4. 【答案】C

【知识点】合情推理（归纳、类比推理）

【解析】

【分析】

本题考查对图表数据的分析，进行判断，属于基础题.

根据图表进行选项判断，可知 C 错误.

【解答】

解：甲的成绩从高到低的前 3 个科目依次是地理、化学、生物(物理)，

C 选项错，

故选：C.

5. 【答案】B

【知识点】二倍角公式及其应用

【解析】

【分析】由已知结合二倍角正弦公式进行化简可求 $\cos\alpha$ ，然后结合二倍角余弦公式即可求解.

本题主要考查了二倍角正弦及余弦公式，属于基础题.

【解答】

解：因为 $\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}$,

所以 $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$,

则 $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \times \frac{1}{8} - 1 = -\frac{3}{4}$.

故选：B.

6. 【答案】B

【知识点】二项式定理

【解析】解：∵ $(a-x)(1+x)^6$ 的展开式中 x 的奇数次幂项的系数之和为 64，

$$\text{设 } f(x) = (a-x)(x+1)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6 + a_7x^7,$$

$$\text{令 } x = 1, \text{ 则 } f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = (a+1)(1-1)^5 = 64(a-1), \text{ ①}$$

$$\text{令 } x = -1, \text{ 则 } f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 = (a-1)(-1-1)^5 = 0; \text{ ②}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得, } 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7) = 64(a-1), \therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 32(a-1) = 64,$$

解得 $a = 3$,

故选：B.

设出解析式，给展开式中的 x 分别赋值 1, -1，可得两个等式，两式相减，再除以 2 得到答案.

本题考查了二项式展开式的系数问题，可设出解析式，用赋值法代入特殊值，相加或相减即可，属于中档题.

7. 【答案】C

【知识点】 函数图象的作法、函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象与性质

【解析】解：由 $f(0) = 0$ 得： $4\cos\varphi = 0$ ，又 $0 < \varphi < \pi$ ，

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{2},$$

由图象可知， $y = 4\cos(\omega x + \frac{\pi}{2})$ 的周期为 2，

$$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = 2,$$

$$\therefore \omega = \pi,$$

$$\therefore \frac{\omega}{\varphi} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2,$$

故选：C.

由 $f(0) = 0$ ， $0 < \varphi < \pi$ ，可求得 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ，由图象可知， $y = 4\cos(\omega x + \frac{\pi}{2})$ 的周期为 2，

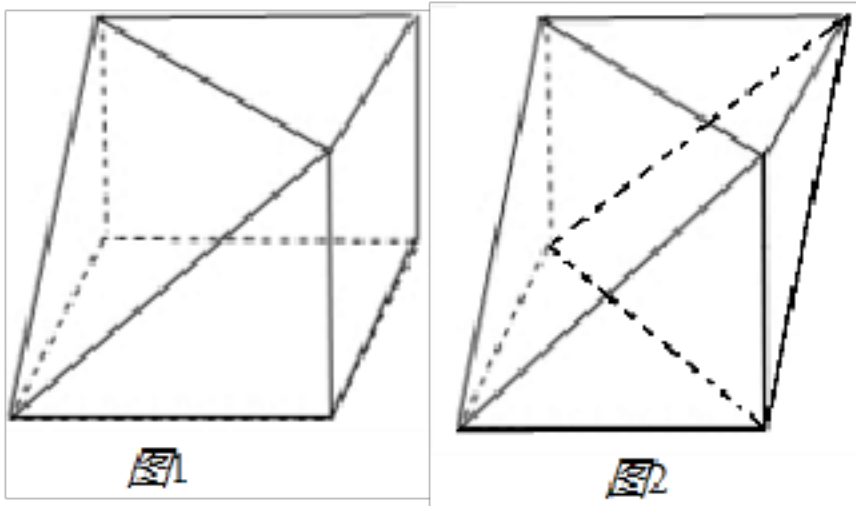
可求得 ω ，从而可得答案.

本题考查由函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象确定解析式，考查识图与运算能力，属于中档题.

8. 【答案】D

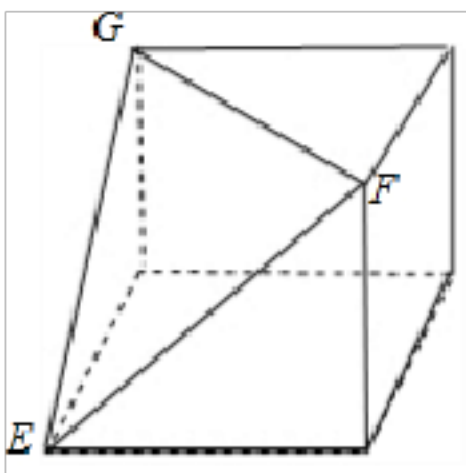
【知识点】 命题及其关系

【解析】解：由三视图可画出直观图如下图：



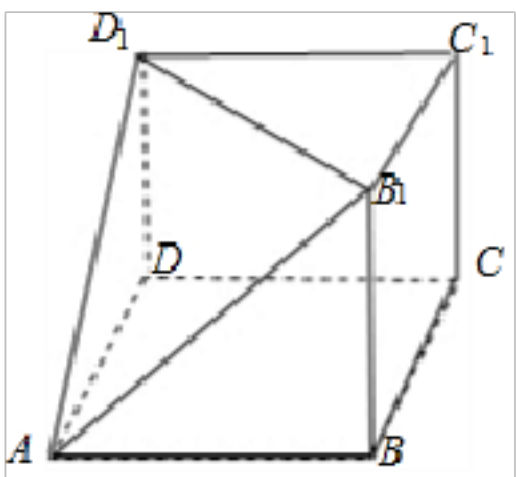
如图 1, $V = 1^3 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{5}{6}$, 故①正确;

如图 2, $V = 1^3 - 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{2}{3}$, 故②正确;



如上图, AB 和 CD 在直观图中所对应的棱分别为 EF 和 FG , 由 $\triangle EFG$ 为正三角形,

可知 AB 和 CD 在直观图中所对应的棱所成的角为 $\frac{\pi}{3}$, 故③正确;



如上图, 平面 $ABCD \parallel$ 平面 $B_1C_1D_1$, 面 $ADD_1 \parallel$ 面 BCC_1B_1 , 面 $ABB_1 \parallel$ 面 DCC_1D_1 , 面 $AB_1D_1 \parallel$ 面 BC_1D , 故④正确,

故选: D .

根据三视图画出直观图后即可对四个选项逐一进行判断.

本题考查了空间位置关系及其判断、简易逻辑的判定方法, 考查了推理能力与计算能力, 属于基础题.

9. 【答案】 D

【知识点】对数与对数运算

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/078102125037006047>