山东省济南市2023-2024学年高二上学期1月期末质量检测数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．直线$x-y+1=0$的倾斜角是（　）

A．30°　　B．45°　　C．60°　　D．120°

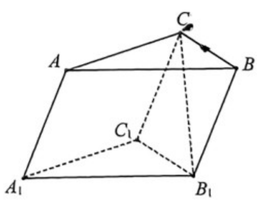
2．已知双曲线$x^2-\frac{y^2}{2}=1$，则其渐近线方程为（　）

A．$y=\pm\frac{1}{2}x$　　B．$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$　　C．$y=\pm\sqrt{2}x$　　D．$y=\pm2x$

3．已知正项等比数列$\{a_n\}$中，$a_2\cdot a_8=16$，则a_5等于（　）

A．2　　B．4　　C．5　　D．8

4．在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，若$\overrightarrow{AC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，则$\overrightarrow{CB_1}=$（　）



A．$\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$　　B．$\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$　　C．$-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$　　D．$-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

5．2023年10月29日，“济南泉城马拉松”在济南大明湖路拉开序幕，约3万名选手共聚一堂，在金秋十月享受了一场酣畅淋漓的马拉松盛会．某赞助商在沿途设置了10个饮水补给站，第一个补给站准备了1千瓶饮用水，第二站比第一站多2千瓶，第三站比第二站多3千瓶，以此类推，第n站比第$n-1$站多n千瓶（$n\geq2$且$n\in N^*$），第10站准备的饮用水的数量为（　）

A．45千瓶　　B．50千瓶　　C．55千瓶　　D．60千瓶

6．已知$A(2,0)$，$B(8,0)$，若直线$y=kx$上存在点M使得$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$，则实数$k$的取值范围为（　）

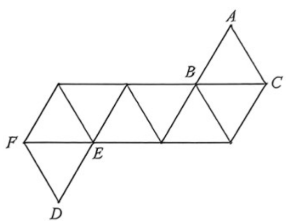
A. $\left[-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right]$　　B. $\left[-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right]$

C. $\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$　　D. $\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right]\cup\left[\frac{4}{3},+\infty\right)$

7．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，其中$A$、$F_2$分别为双曲线的左顶点、右焦点，$P$为双曲线上的点，满足$PF_2$垂直于$x$轴且$|AF_2|=2|PF_2|$，则双曲线的离心率为（　）

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C．2　　D．3

8．如图所示为正八面体的展开图，该几何体的8个表面都是边长为1的等边三角形，在该几何体中，P为直线DE上的动点，则P到直线AB距离的最小值为（　）



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{7}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

二、多选题

9．一条光线从点$A(-2,3)$射出，射向点$B(1,0)$，经x轴反射后过点$C(a,1)$，则下列结论正确的是（　）

A．直线AB的斜率是-1　　B. $AB\perp BC$

C. $a=3$　　D. $|AB|+|BC|=4\sqrt{2}$

10．已知F_1，F_2分别是椭圆$C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$的左，右焦点，$P$为椭圆$C$上异于长轴端点$A$，$B$的动点，则下列结论正确的是（　）

A．椭圆C的焦距为6　　B．$\triangle PF_1F_2$的周长为16

C．$2\le|PF_1|\le 8$　　D．$\triangle PF_1F_2$的面积的最大值为16

11．在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点P，Q分别满足$\overrightarrow{D_1P}=\lambda\overrightarrow{D_1B_1}$，$\overrightarrow{DQ}=\lambda\overrightarrow{DA_1}$，则（　）

A．$\exists\lambda\in(0,1)$，使$PQ\perp A_1D$且$PQ\perp B_1D_1$

B．$\forall\lambda\in(0,1)$，$PQ//$平面ABB_1A_1

C．$\exists\lambda\in(0,1)$，使PQ与平面$ABCD$所成角的正切值为$\frac{2}{3}$

D．$\forall\lambda\in(0,1)$，BP与AQ是异面直线

12．已知集合$A=\{x|x=2n-1,n\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{x|x=3n-2,n\in\mathbf{N}^*\}$．将$A\cup B$的所有元素从小到大依次排列构成一个数列$\{a_n\}$，记$S_n$为数列$\{a_n\}$的前$n$项和，则下列说法正确的是（　）

A．$a_2=3$　　B．$a_{n+4}-a_n=6$　　C．$a_{2023}=3035$　　D．若$S_n>2024$，则$n\ge 52$

三、填空题

13．已知$\vec{a}=(2,1,1)$，$\vec{b}=(-6,\lambda,-3)$，若$\vec{a}//\vec{b}$，则λ的值为____．

14．已知等差数列$\{a_n\}$首项$a_1=7$，公差$d=-2$，则前n项和S_n的最大值为____．

15．已知圆$C:x^2+y^2=4$，直线$l:mx+y-m-1=0$，直线l被圆C截得的最短弦长为____．

16．已知抛物线$C: y^2=4x$的焦点为F，过点F作与x轴不垂直的直线l交C于点A，B，过点A做垂直于x轴的直线交C于点D，若点M是$\triangle ABD$的外心，则$\frac{|AB|}{|MF|}$的值为____．

四、解答题

17．已知等差数列$\{a_n\}$，满足$2a_2+a_5=15$，$a_4=7$．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)令$b_n=(-1)^n a_n$，求$\{b_n\}$的前$2n$项和T_{2n}．

18．已知圆心为C的圆经过$O(0,0)$，$A(0,2\sqrt{3})$两点，且圆心C在直线$l: y=\sqrt{3}x$上．

(1)求圆C的标准方程；

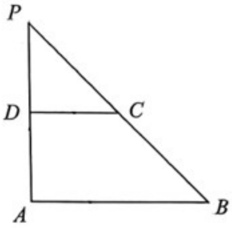
(2)点P在圆C上运动，求$|PO|^2+|PA|^2$的取值范围．

19．已知抛物线的准线方程为$x=-2$，直线l与抛物线交于A,B两点，O为坐标原点．

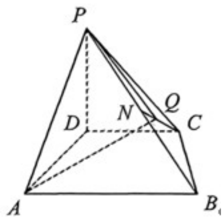
(1)若$\triangle OAB$为等腰直角三角形，求$\triangle OAB$的面积；

(2)若$OA\perp OB$，证明：直线l过定点P，并求出定点P的坐标．

20．如图（1）所示$\triangle PAB$中，$AP\perp AB$，$AB=AP=12$．D,C分别为PA,PB中点．将$\triangle PDC$沿DC向平面$ABCD$上方翻折至图（2）所示的位置，使得$PA=6\sqrt{2}$．连接PA,PB,PC得到四棱锥$P-ABCD$．记PB的中点为N，连接CN．



（1）



（2）

(1)证明：$CN \perp$平面PAB；

(2)点Q在线段CN上且$QC = 2QN$，连接AQ, PQ，求平面PAQ与平面$ABCD$的夹角的余弦值．

21．设数列$\{a_n\}$，其前n项和为S_n，$2S_n = 3n^2 + 3n$，$\{b_n\}$为单调递增的等比数列，

$b_1b_2b_3 = 729$，$b_1 + a_2 = b_3 - a_6$．

(1)求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

(2)记c_m为$\{b_n\}$在区间$(0, a_m]$$(m \in \mathbf{N}^*)$中的项的个数，求数列$\{c_m\}$的前100项和$T_{100}$．

22．在平面直角坐标系．xOy中，设A_1，A_2两点的坐标分别为$(-2,0)$，$(2,0)$．直线

A_1M，A_2M相交于点M，且它们的斜率之积是$-\frac{1}{2}$．

(1)求动点M的轨迹方程；

(2)记动点M的轨迹为曲线E，过$P(1,0)$作两条互相垂直的直线l_1，l_2，l_1与曲线E交于

A、B两点，l_2与曲线E交于C、D两点，求$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$的最大值．

参考答案：

1．B

【分析】根据直线的一般方程与斜率的关系，结合斜率与倾斜角的关系求解即可.

【详解】直线$x-y+1=0$的斜率为1，故倾斜角为$45°$.

故选：B

2．C

【分析】利用双曲线方程，求解渐近线方程即可.

【详解】由于双曲线为$x^2-\frac{y^2}{2}=1$，所以其渐近线方程为$y=\pm\sqrt{2}x$.

故选：C.

3．B

【分析】根据等比中项的性质计算即可.

【详解】由题意易知$a_2\cdot a_8=a_5^2=16$，

又$\{a_n\}$各项为正数，所以$a_5=4$.

故选：B

4．D

【分析】利用空间向量的线性运算计算即可.

【详解】由题可知$\overrightarrow{CB_1}=\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

故选：D

5．C

【分析】设第n站的饮用水的数量为$a_n\ (n=1,2,3,\cdots,10)$，由题意得：$a_1=1$，$a_2-a_1=2$，

$a_3-a_2=3$，L，$a_{10}-a_9=10$，然后利用累加法即可求解.

【详解】设第n站的饮用水的数量为$a_n\ (n=1,2,3,\cdots,10)$，由题意得：$a_1=1$，$a_2-a_1=2$，

$a_3-a_2=3$，L，$a_{10}-a_9=10$，以上等式相加得：，

$a_{10}=a_1+\left(a_2-a_1\right)+\left(a_3-a_2\right)+\cdots+\left(a_{10}-a_9\right)=1+2+3+\cdots+10=\frac{\left(1+10\right)\times10}{2}=55$，

即 $a_{10}=55$.

故选：C

6．A

【分析】由题可得点 M 的轨迹方程，再由直线与圆有公共点建立不等式，求解即可.

【详解】因为 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$，所以 $AM\perp BM$，则点 M 在以 AB 为直径的圆上，

因为 AB 的中点坐标为 $(5,0)$，$|AB|=6$，所以点 M 的轨迹方程为 $(x-5)^2+y^2=9$，

由题可知，直线 $y=kx$ 与圆 $(x-5)^2+y^2=9$ 有公共点，所以 $\frac{|5k|}{\sqrt{1+k^2}}\le3$，解得：$-\frac{3}{4}\le k\le\frac{3}{4}$.

故选：C

7．A

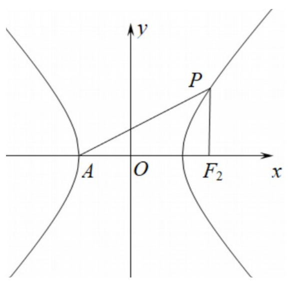
【分析】设 $P\left(c,y_0\right)$，代入双曲线方程求出 $|y_0|$，根据 $|AF_2|=2|PF_2|$ 可得答案.

【详解】设 $P\left(c,y_0\right)$，则 $\frac{c^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$，解得 $|y_0|=\frac{b^2}{a}$，即 $|PF_2|=\frac{b^2}{a}$，$|AF_2|=a+c$，

因为 $|AF_2|=2|PF_2|$，所以 $a+c=2\frac{b^2}{a}$，可得 $a^2+ac=2\left(c^2-a^2\right)$，

$2e^2-e-3=0$，解得 $e=\frac{3}{2}$.

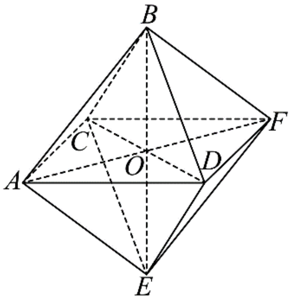
故选：A.



8．B

【分析】作出该几何体，确定直线DE和直线AB为异面直线，再根据平面ABC//平面DEF，结合等体积法求得D到平面ABC的距离即可.

【详解】把平面展开图还原为空间八面体，如图所示：



由题意，P到直线AB距离的最小值即直线DF到直线AB的距离，

又$DF // AC$，$AC \subset$平面ABC，$DF \not\subset$平面ABC，故DF//平面ABC.

又$BC = BD = EC = ED = 1$，故四边形$BCED$为菱形，则$DE // BC$.

$BC \subset$平面ABC，$DE \not\subset$平面ABC，故DE//平面ABC.

又$DF \cap DE = D$，$DF, DE \subset$平面DEF，故平面DEF//平面ABC.

故直线DF到直线AB的距离为平面DEF到平面ABC的距离.

则D到平面ABC的距离即为P到直线AB距离的最小值.

设AF与CD交于O，则易得O为正四棱锥$B-ADFC$中心.

则$BA = BC = BD = AC = AD = 1$，$CD = \sqrt{AC^2 + AD^2} = \sqrt{2} = \sqrt{BC^2 + BD^2}$，故$\triangle BCD$为直角三角形，故$OB = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

设D到平面ABC的距离为h，则由$V_{B-ACD}=V_{D-ABC}$，故$\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot BO=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h$，

故$\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}h$，解得$h=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

故选：B

9．ABD

【分析】选项A应用斜率公式计算即可；选项B，先求得点A关于x轴的对称点，进而求得反射光线所在直线的斜率，应用两条直线垂直的斜率公式判断即可；选项C，求得反射光线所在直线的方程，进而求得点C的坐标；选项D应用两点间距离公式求解即可.

【详解】由于$A(-2,3)$、$B(1,0)$，由斜率公式得：$k_{AB}=\frac{0-3}{1-(-2)}=-1$，选项A正确；

点$A(-2,3)$关于x轴的对称点A_1的坐标为$(-2,-3)$，经x轴反射后直线BC的斜率为：

$k_{BC}=k_{A_1B}=\frac{0-(-3)}{1-(-2)}=1$，且$k_{BC}\cdot k_{AB}=-1$，所以$AB\perp BC$，选项B正确；

直线BC即直线A_1B的方程为：$y-0=1\times(x-1)$，即$y=x-1$，

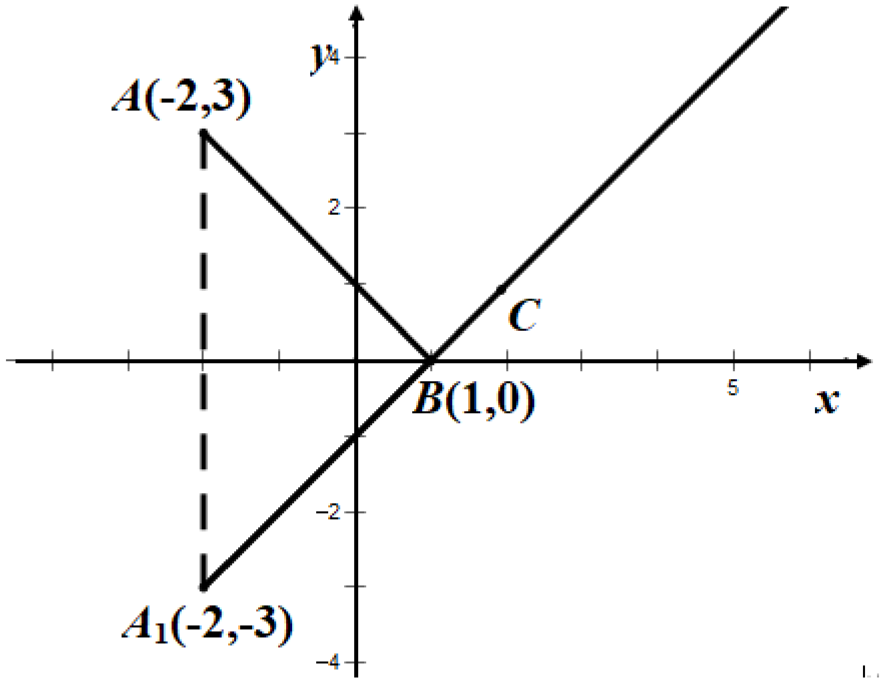
将$y=1$代入得：$x=2$，所以点$C(2,1)$，$a=2$，选项C不正确；

由两点间距离公式得：

$|AB|+|BC|=\sqrt{[1-(-2)]^2+(0-3)^2}+\sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2}=4\sqrt{2}$，

选项D正确；

故选：ABD.



10．AB

【分析】由椭圆方程求得a，b，c的值，根据椭圆的几何性质结合选项即可逐一求解.

【详解】由椭圆$C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$，得$a=5$，$b=4$，$c=3$，

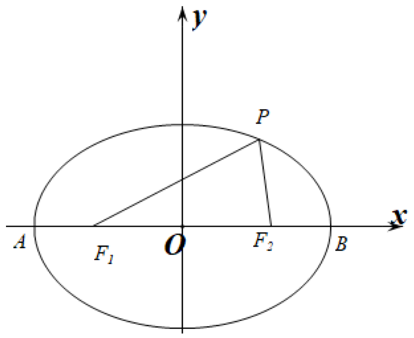
$\therefore$椭圆C的焦距为$2c=6$，故A正确；

又P为椭圆C上异于长轴端点A，B的动点，$\therefore\triangle PF_1F_2$的周长为$2a+2c=16$，故B正确；

$2=a-c<|PF_1|<a+c=8$，故C错误；

当P为椭圆C的短轴的一个端点时，$\triangle PF_1F_2$的面积取最大值为$\frac{1}{2}\times 2c\times b=bc=12$，故D错误.

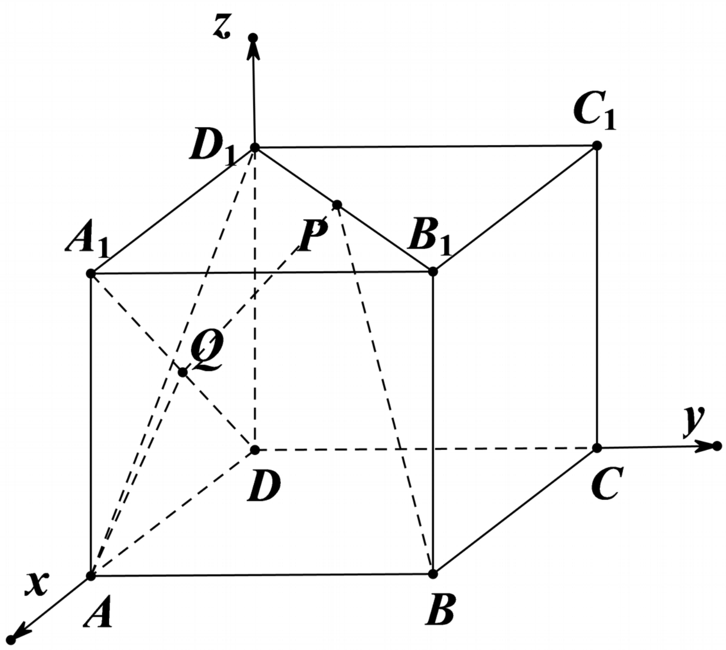
故选：AB.



11．BCD

【分析】建立空间直角坐标系，利用空间向量一一计算判定选项即可.

【详解】



如图所示，建立空间直角坐标系，

根据题意可知 $P(\lambda,\lambda,1),Q(\lambda,0,\lambda),A_1(1,0,1),D_1(0,0,1),B(1,1,0),A(1,0,0)$，

则 $\overrightarrow{PQ}=(0,-\lambda,\lambda-1),\overrightarrow{DA_1}=(1,0,1),\overrightarrow{BP}=(\lambda-1,\lambda-1,1),\overrightarrow{AQ}=(\lambda-1,0,\lambda)$，

平面 ABB_1A_1 的一个法向量为 $\vec{m}=(1,0,0)$，平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$，

对于 A，若 $PQ\perp A_1D$，则 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{DA_1}=(0,-\lambda,\lambda-1)\cdot(1,0,1)=\lambda-1=0$

$\Rightarrow\lambda=1\notin(0,1)$，故 A 错误；

对于B，易知$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{m}=(0,-\lambda,\lambda-1)\cdot(1,0,0)=0$恒成立，且$PQ\not\subset$平面$ABB_1A_1$，

则$PQ//$平面ABB_1A_1，故B正确；

对于C，设PQ与平面$ABCD$所成角为$\alpha\left(\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$，

若$\tan\alpha=\frac{2}{3}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}$，

即$\sin\alpha=\left|\cos\overrightarrow{PQ},\vec{n}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}\right|=\frac{|\lambda-1|}{\sqrt{(\lambda-1)^2+\lambda^2}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$，解之得$\lambda=\frac{3}{5}$或$\lambda=3$，

显然$\exists\lambda\in(0,1)$，使得结论成立，故C正确；

对于D，因为$\overrightarrow{BP}=(\lambda-1,\lambda-1,1),\overrightarrow{AQ}=(\lambda-1,0,\lambda)$，

若$\overrightarrow{BP},\overrightarrow{AQ}$共线，则存在实数$k$，使得$\overrightarrow{BP}=k\overrightarrow{AQ}\Rightarrow\begin{cases}\lambda-1=k(\lambda-1)\\\lambda-1=k\times0\\1=k\lambda\end{cases}$，解得$\lambda=1\notin(0,1)$，

所以$\forall\lambda\in(0,1)$，$\overrightarrow{BP},\overrightarrow{AQ}$不共线，故D正确.

故选：BCD

12．ABD

【分析】求得$A\cap B,A\cup B$中的一些元素，结合等差数列的定义、通项公式、求和公式，对选项逐一判断即可.

【详解】由题意可得：$A\cap B=\left\{x\middle|x=6n-5,n\in\mathbf{N}^*\right\}$,

可得$A\cup B=\{1,3,4,5,7,9,10,11,13,15,16,17,19,\cdots\}$，

则$a_1=1,a_2=3,a_3=4,a_4=5,a_5=7,a_6=9,a_7=10,a_8=11,\cdots$,