2023-2024学年黑龙江省齐齐哈尔市高二上学期10月期中数学试题

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $\overrightarrow{a}=(1,2,1),\overrightarrow{b}=(-2,3,1)$，则 $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{b}=$(　　)

A. -19　　B. -20　　C. 20　　D. 19

2. 直线 $4x-3y+m=0$ 的一个方向向量是(　　)

A. $(4,3)$　　B. $(4,-3)$　　C. $(3,4)$　　D. $(3,-4)$

3. 已知椭圆 $C:9x^2+4y^2=1$，则椭圆的长轴长为(　　)

A. 1　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

4. 若圆 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 关于直线 $2ax-by+1=0$ 对称，则 $a+b$ 等于(　　)

A. 1　　B. -1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

5. 已知空间三点 $A(1,-1,2),B(3,0,-1),C(2,3,-3)$，则向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 的夹角为(　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

6. 空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，经过点 $P(x_0,y_0,z_0)$，且法向量为 $\overrightarrow{m}=(A,B,C)$ 的平面方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，经过点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 且一个方向向量为 $\overrightarrow{n}=(a,b,c)(abc\neq 0)$ 的直线 l 的方程为 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$，阅读上面的内容并解决下面问题：现给出平面 α 的方程为 $2x-7y+z-4=0$，经过 $(0,0,0)$ 的直线 l 的方程为 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-1}$，则直线 l 与平面 α 所成角的正弦值为(　　)

A. $\frac{\sqrt{21}}{7}$　　B. $\frac{\sqrt{21}}{9}$　　C. $\frac{\sqrt{21}}{14}$　　D. $\frac{\sqrt{21}}{6}$

7. 已知直线 $y=2x+m$ 与曲线 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 有两个不同的交点，则 m 的取值范围为(　　)

A. $\left[0,2\sqrt{5}-4\right)$　　B. $\left[0,2\sqrt{5}-4\right]$　　C. $\left[-2\sqrt{5}-4,0\right)$　　D. $\left[-2\sqrt{5}-4,0\right]$

8. 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F，上顶点为 A，直线 AF 与 E 相交的另一点为 M，点 M 在 x 轴的射影为点 N，O 为坐标原点，若 $\overrightarrow{AO}=3\overrightarrow{NM}$，则 E 的离心率是(　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

二、多选题：本题共 **4** 小题，共 **20** 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 **5** 分，部分选对的得 **2** 分，有选错的得 **0** 分。

9. 关于直线 $l:\sqrt{3}x-y-1=0$，下列说法正确的有(　　)

A. 过点 $(\sqrt{3},-2)$　　　B. 斜率为 $\sqrt{3}$　　　C. 倾斜角为 60°　　　D. 在 y 轴上的截距为 1

10. 已知圆心为 C 的圆 $x^2+y^2-4x+6y+11=0$ 与点 $A(0,-5)$，则(　　)

A. 圆 C 的半径为 2　　　B. 点 A 在圆 C 外

C. 点 A 与圆 C 上任一点距离的最大值为 $3\sqrt{2}$　　　D. 点 A 与圆 C 上任一点距离的最小值为 $\sqrt{2}$

11. 已知点 P 是椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 上一点，点 F_1、F_2 是椭圆的左、右焦点，若 $\angle F_1PF_2=60^{\circ}$，则下列说法正确的是(　　)

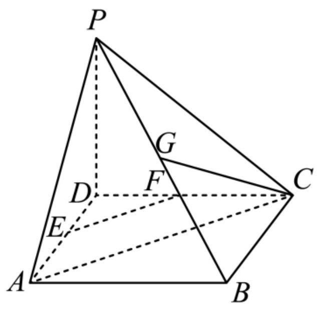
A. $\triangle F_1PF_2$ 的面积为 $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

B. 若点 M 是椭圆上一动点，则 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}$ 的最大值为 9

C. 点 P 的纵坐标为 $\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$

D. $\triangle F_1PF_2$ 内切圆的面积为 $\dfrac{\pi}{3}$

12. 《九章算术》中，将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马，将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑.如图，在阳马 $P-ABCD$ 中，侧棱 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，且 $PD=CD=AD=2,E,F,G$ 分别为 DA,DC,PB 的中点，则(　　)



A. 若 PC 的中点为 M，则四面体 $D-BCM$ 是鳖臑

B. CG 与 EF 所成角的余弦值是 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

C. 点 S 是平面 PAC 内的动点，若 $SD+SG=2$，则动点 S 的轨迹是圆

D. 过点 E，F，G 的平面与四棱锥 $P-ABCD$ 表面交线的周长是 $2+2\sqrt{2}$

三、填空题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分。

13. 若直线 $l_1:2x+ay-4=0$ 与直线 $l_2:(a-1)x+3y-4=0$ 平行，则实数 a 的值为__________.

14. 已知直线 l 的方向向量为 $(-3, m, 2)$，平面 α 的法向量为 $(n, 3, 4)$，且 $l \perp \alpha$，则 $2m+n=$__________.

15. 已知圆 $C_1:(x-a)^2+y^2=36$ 与圆 $C_2:x^2+(y-b)^2=4$ 只有一条公切线，则 $a^2+b^2=$__________.

16. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1，F_2，斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线 l 经过左焦点 F_1 且交 C 于 A，B 两点（点 A 在第一象限），设 $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆半径为 r_1，$\triangle BF_1F_2$ 的内切圆半径为 r_2，若 $\frac{r_1}{r_2}=2$，则椭圆的离心率 $e=$__________.

四、解答题：本题共 **6** 小题，共 **70** 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（本小题 10 分）

已知直线 l 经过点 $P(2,1), Q(4,5)$.

(1) 求直线 l 的一般式方程；

(2) 若直线 m 与直线 l 垂直，且在 y 轴上的截距为 2，求直线 m 的方程.

18.（本小题 12 分）

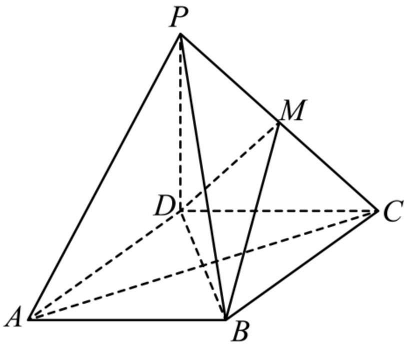
已知椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$，点 $M(2,1)$.

(1) 若椭圆的左焦点为 F，上顶点为 D，求点 M 到直线 DF 的距离；

(2) 若点 M 是椭圆的弦 AB 的中点，求直线 AB 的方程.

19.（本小题 12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD \perp$ 面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为菱形，$PD=AD=2, \angle DAB=60^\circ$，$M$ 是 PC 的中点.



(1) 求证：$AC \perp$ 平面 PBD；

(2) 求二面角 $M-DB-P$ 的余弦值.

20.（本小题 12 分）

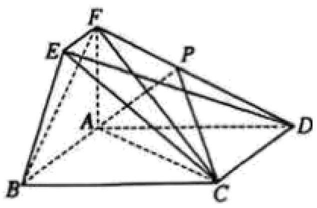
已知圆 C 经过 $A(0,2), B(1,1)$，且圆心在直线 $l_1: 2x+y-4=0$ 上.

(1) 求圆 C 的方程；

(2) 若从点 $M(3,5)$ 发出的光线经过直线 $l_2: x+y-1=0$ 反射后恰好平分圆 C 的圆周，求反射光线所在直线的方程.

21.（本小题 12 分）

在如图所示的几何体中，四边形 ABCD 为矩形，$AF\perp$ 平面 ABCD，$EF//AB$，$AD=2$，$AB=AF=2EF=1$，点 P 为棱 DF 上一点(不含端点).



(1) 当 FP 为何值时，$AP\perp PC$；

(2) 求直线 DE 与平面 BCF 所成角的正弦值.

22.（本小题 12 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，点 P 为 E 上的一动点，$F_1,F_2$ 分别是椭圆 E 的左　右焦点，$\triangle PF_1F_2$ 的周长是 12，椭圆 E 上的点到焦点的最短距离是 2.

(1) 求椭圆的标准方程；

(2) 过点 $(2,0)$ 的动直线 l 与椭圆交于 P，Q 两点，求 $\triangle F_1PQ$ 面积的最大值及此时 l 的方程.

答案和解析

1.【答案】D

【解析】【分析】

本题考查了空间向量的坐标运算，是基础题.

由空间向量的数量积坐标公式求得结果.

【解答】

解：因为 $\overrightarrow{a}=(1,2,1),\overrightarrow{b}=(-2,3,1)$ ，

所以 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(-1,5,2)$ ，则 $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{b}=-1\times(-2)+3\times5+1\times2=19$ ，

故选： D.

2.【答案】C

【解析】【分析】

本题考查直线的方向向量，属于基础题.

根据直线斜率可得其方向向量.

【解答】

解：$\because$直线$4x-3y+m=0$的斜率$k=\dfrac{4}{3}$，

$\therefore$直线$4x-3y+m=0$的一个方向向量为$(3,4)$.

故选：C.

3.【答案】A

【解析】【分析】

本题主要考查了椭圆的定义和性质，属于较易题.

转化为椭圆的标准方程即可求解.

【解答】

解：由椭圆 $C:9x^2+4y^2=1$ 得： $\dfrac{x^2}{\frac{1}{9}}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$ ，

所以 $a^2=\dfrac{1}{4}$ ，解得 $a=\dfrac{1}{2}$ ，所以长轴长 $2a=1$.

故选： A.

4.【答案】C

【解析】【分析】

本题考查关于直线对称的圆的方程，属于基础题.

利用圆的标准方程、点在直线上运算即可得解.

【解答】

解：$\because$圆的方程$x^2+y^2+2x-4y+1=0$可化为$(x+1)^2+(y-2)^2=4$，

$\therefore$圆心为$C(-1,2)$，

$\because$圆$x^2+y^2+2x-4y+1=0$关于直线$2ax-by+1=0$对称，

$\therefore$圆心$C(-1,2)$在直线$2ax-by+1=0$上，

$\therefore -2a-2b+1=0$，

$\therefore a+b=\frac{1}{2}$.

故选：C.

5.【答案】C

【解析】【分析】

本题考查向量坐标运算法则、向量夹角余弦公式等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

根据已知求出 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB}$ ，再用向量夹角余弦公式直接求解，即可求出答案.

【解答】

解：由已知可得 $\overrightarrow{AB}=(2,1,-3)$ ， $\overrightarrow{CB}=(1,-3,2)$ ，

所以 $\cos\left\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|}=\frac{-7}{\sqrt{14}\times\sqrt{14}}=-\frac{1}{2}$.

又 $\left\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB}\right\rangle\in[0,\pi]$ ，

所以 $\left\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB}\right\rangle=\frac{2\pi}{3}$.

故选：C.

6.【答案】A

【解析】【分析】

本题考查直线与平面所成角的向量求法，属于中档题.

由题意得到直线 l 的方向向量和平面α的法向量，利用线面角的向量求解公式得到答案.

【解答】

解：由题意经过$(0,0,0)$的直线 l 的方程为$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-1}$，

得直线 l 的方向向量为$\overrightarrow{n_1}=(2,3,-1)$，

由平面α的方程为$2x-7y+z-4=0$，

得平面α的法向量为$\overrightarrow{m_1}=(2,-7,1)$，

设直线 l 与平面α所成角的大小为θ，

则$\sin\ \theta=|\cos\ \langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{m_1}\rangle|=\frac{|(2,3,-1)\cdot(2,-7,1)|}{\sqrt{4+9+1}\times\sqrt{4+49+1}}=\frac{|4-21-1|}{\sqrt{14}\times\sqrt{54}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

故选：A.

7.【答案】A

【解析】【分析】

本题考查了直线与圆的位置关系，属于中档题.

根据已知条件及直线与圆相切的充要条件，结合点到直线的距离公式即可求解.

【解答】

解：曲线 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 表示圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 在 x 轴的上半部分（包括 x 轴上的两点），

当直线 $y=2x+m$ 与圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 相切时，$\frac{|-4-m|}{\sqrt{5}}=2$，

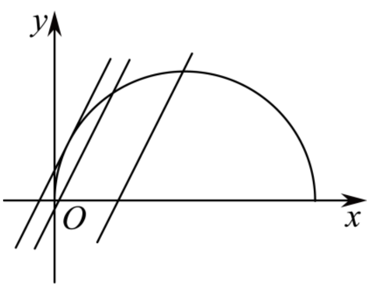
解得 $m=\pm2\sqrt{5}-4$，

当点 $(0,0)$ 在直线 $y=2x+m$ 上时，$m=0$，

结合图象可得 $m\in[0,2\sqrt{5}-4)$，

所以实数取值范围为 $[0,2\sqrt{5}-4)$.

故选：A



8.【答案】B

【解析】【分析】

本题考查椭圆的离心率计算，属于中档题.

确定 $M\left(\frac{4}{3}c,-\frac{b}{3}\right)$，代入椭圆方程得到 $\frac{16}{9}e^2+\frac{1}{9}=1$，解得答案.

【解答】

解：由题意可知，$A(0,b)$，$F(c,0)$，$\overrightarrow{AO}=3\overrightarrow{NM}$，

则 $\overrightarrow{OF}=3\overrightarrow{FN}$，$M\left(\frac{4}{3}c,-\frac{b}{3}\right)$，

故 $\frac{16c^2}{9a^2}+\frac{b^2}{9b^2}=1$，

即 $\frac{16}{9}e^2+\frac{1}{9}=1$，

解得 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$（舍去负值），

故选：B.

9.【答案】*BC*

【解析】【分析】

本题主要考查一般式方程、直线斜率与倾斜角的关系，属于基础题.

A. 当 $x=\sqrt{3}$ 时，$y=2$，所以该选项错误；

B. 直线的斜率为 $\sqrt{3}$，所以该选项正确；

C.直线的倾斜角为 60°，所以该选项正确；

D. 当 $x=0$ 时，$y=-1$，所以该选项错误.

【解答】

解：$A.$ 当 $x=\sqrt{3}$ 时，$\sqrt{3}\times\sqrt{3}-y-1=0,\therefore y=2$，所以直线不经过点 $(\sqrt{3},-2)$，所以该选项错误；

B. 由题得 $y=\sqrt{3}x-1$，所以直线的斜率为 $\sqrt{3}$，所以该选项正确；

C. 由于直线的斜率为 $\sqrt{3}$，所以直线的倾斜角为 60°，所以该选项正确；

D. 当 $x=0$ 时，$y=-1$，所以直线在 *y* 轴上的截距不为 1，所以该选项错误.

故选：BC.

10.【答案】*BCD*

【解析】【分析】

本题考查圆的半径的求法与点与圆的关系判定，数形结合法求圆上的点到一定点的距离的最值，属于基础题.

圆的方程配方求得半径可判断 A；把点 A 的坐标代入圆方程左边计算代数式的值可判断 B；求出圆上的点到定点 A 的距离的最值可判断 CD.

【解答】

解：由圆 $x^2+y^2-4x+6y+11=0$ 得 $(x-2)^2+(y+3)^2=2$，知圆 C 的半径为 $\sqrt{2}$，故 A 错误；

把点 $A(0,-5)$ 代入圆的方程 $x^2+y^2-4x+6y+11=0$ 的左边代数式

有 $0^2+(-5)^2-4\times0+6\times(-5)+11=6>0$，所以点 A 在圆 C 外，故 B 正确；

圆心 $C(2,-3)$ 到点 $A(0,-5)$ 的距离为 $|AC|=\sqrt{(2-0)^2+(-3+5)^2}=2\sqrt{2}$，

所以圆 C 上任一点到点 A 的距离的最大值为 $2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$，

最小距离为 $2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$，故 CD 正确；

故选：BCD.

11.【答案】AD

【解析】【分析】

本题考查椭圆的定义和焦点三角形问题、向量数量积的坐标运算、利用余弦定理解三角形、三角形面积公式，属于较难题.

A、根据椭圆定义和余弦定理求出 $|PF_1||PF_2|=\dfrac{20}{3}$，再利用三角形面积公式求出 $S_{\triangle F_1PF_2}$，即可判断 A 选项的正误.

B、设点 $M(x_0, y_0)$，根据椭圆的方程可得 $-3\leqslant x_0\leqslant 3$，利用向量数量积的坐标运算求出 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}$ 关于 x_0 的表达式，结合 x_0 的取值范围求得 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}$ 的最大值，即可判断 B 选项的正误.

C、利用三角形面积求出点 P 的纵坐标，即可判断 C 选项的正误.

D、利用等面积法求出 $\triangle F_1PF_2$ 内切圆的半径，求出内切圆的面积，即可判断 D 选项的正误.

【解答】

解：椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$，则 $a=3$， $b=\sqrt{5}$， $c=\sqrt{a^2-b^2}=2$，

根据椭圆定义得 $|PF_1|+|PF_2|=2a=6$.

对于 A 选项，$(|PF_1|+|PF_2|)^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2+2|PF_1||PF_2|=4a^2=36(\text{I})$，

在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由余弦定理得 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos 60^\circ$，

即 $|PF_1|^2+|PF_2|^2-|PF_1||PF_2|=4c^2=16(\text{II})$，

由(Ⅰ)和(Ⅱ)得$|PF_1||PF_2|=\dfrac{20}{3}$，

则$\triangle F_1PF_2$的面积$S=\dfrac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{20}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$，故*A*选项正确.

对于*B*选项，设点$M(x_0,y_0)$，则$\dfrac{x_0^2}{9}+\dfrac{y_0^2}{5}=1(-3\leqslant x_0\leqslant 3)$，

$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=(-2-x_0,-y_0)\cdot(2-x_0,-y_0)=x_0^2+y_0^2-4=x_0^2+5-\dfrac{5x_0^2}{9}-4=\dfrac{4x_0^2}{9}+1$，

当$x_0=\pm 3$时，$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}$取得最大值5，故*B*选项错误.

对于*C*选项，由*A*选项知$\triangle F_1PF_2$的面积为$\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$，则$\dfrac{1}{2}\times 2c\times|y_P|=2|y_P|=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$，

即$y_P=\pm\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$，故*C*选项错误.

对于*D*选项，设$\triangle F_1PF_2$内切圆的半径为*r*，由*A*选项知$\triangle F_1PF_2$的面积为$\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$，

则$\dfrac{1}{2}(|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|)r=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$，即$\dfrac{1}{2}(6+4)r=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$，

解得$r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以$\triangle F_1PF_2$内切圆的面积为$\pi r^2=(\dfrac{\sqrt{3}}{3})^2\pi=\dfrac{\pi}{3}$，故*D*选项正确.

故选：*AD*.

12.【答案】*ABC*

【解析】【分析】

本题考查了直线与直线所成角的向量求法和空间几何体的截面问题，是较难题.

对于*A*：证明四面体$D-BCM$各面均为直角三角形；

对于*B*：用空间向量法求解；

对于*C*：先确定*S*是以*DG*为长轴的椭球面，又可证*S*所在平面*PAC*与长轴*DG*垂直，可得*S*的轨迹是圆；

对于*D*：用空间向量求出截面与棱的交点，用空间距离计算周长.

【解答】